MANUAL DE SOLUCIONES de física cuántica

Eyvind H. Wichmann

TALLERES
ESTUDIANTILES
CIENCIAS
UNAM

Edición
digital:
Educación
para todos

berkeley physics course - volumen 4

SEGUNDA EDICIÓN

Edición
impresa:
Reverté

MANUAL DE SOLUCIONES de física cuántica

MANUAL DE SOLUCIONES de física cuántica

berkeley physics course - volumen 4

preparado por ***Peter Mohr***

Eyvind H. Wichmann

Profesor de Física
Universidad de California, Berkeley

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona - Buenos Aires - Caracas - México
MCMLXXIII

Título de la obra original:
Solutions Manual - QUANTUM PHYSICS

Edición original en lengua inglesa publicada por:
McGraw-Hill Book Company, New York

Copyright © 1971 by Education Development Center, Inc.

Traducido y adaptado al español por:

Profs. J. Aguilar Peris
Catedrático de Termología de la
Universidad Complutense de Madrid y

J. de la Rubia Pacheco
Catedrático de Mecánica Estadística
de la Universidad de Sevilla

Propiedad de ***EDITORIAL REVERTÉ, S. A.*** *San Magín, 26, Barcelona (6)*

Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad
literaria podrá reproducirse en forma alguna sin el
previo permiso por escrito del editor.

Todos los derechos reservados
Edición en español
© ***EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1973***
Impreso en España Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4019 - 0

Depósito Legal: Z. - 132 - 73

Cometa, S. A. — Avda. de las Torres, 17 — Zaragoza — 1973

Prefacio

Se pretende que este manual constituya una ayuda para los profesores que utilicen el cuarto volumen del BPC.

Parte del mismo puede separarse y colocarse en un tablón de anuncios o, haciendo bien patente el "copyright", puede reproducirse en parte para los alumnos. Sin embargo, no se recomienda que el manual completo se ponga a su disposición.

Serán bien recibidas todas las notificaciones de errores y las recomendaciones precisas para aclarar o mejorar las soluciones. Se ruega que estas comunicaciones sean enviadas al autor, "Department of Physics", University of California, Berkeley, California 94720.

Agradezco al Prof. E. H. Wichmann los comentarios hechos a estas soluciones y las muchas sugerencias de valor que ha hecho para su mejoramiento. También agradezco al Dr. J. D. Finley sus primeros trabajos sobre estas soluciones.

Deseo agradecer a mi esposa, que mecanografió este manual, su paciencia y esmero en el trabajo.

PETER J. MOHR

Berkeley, abril 1971

Capítulo 1

1.1 (a) El concepto de pesos atómicos y moleculares definidos surge cuando se intenta explicar el hecho observado de que los elementos químicos se combinan en proporciones fijas en peso (leyes de proporciones múltiples y constantes) y, en el caso de los gases, también se combinan en proporciones fijas sencillas de sus volúmenes. Ver *Atomic Physics* de Born, página 1, para ulterior estudio.

(b) Los valores primitivos poco precisos de los pesos atómicos podían haberse interpretado como múltiplos enteros exactos del peso del hidrógeno, lo cual llevaría a pensar que los elementos estaban compuestos por átomos de hidrógeno. Cuando las medidas de los pesos atómicos mejoraron de precisión, se descubrieron pesos que no eran múltiplos exactos del hidrógeno, lo que llevó a rechazar la hipótesis de Proust. Los pesos no enteros se debían, como es natural, a la presencia de isótopos. Ver *Atomic Physics* de Born, página 38.

El desarrollo inicial de la hipótesis atómica está descrito en *The world of the Atom.*

1.2 (a) Sea $N(t)$ el número de átomos presentes en el instante t que no se han desintegrado aún. Si admitimos que la probabilidad de desintegración de un átomo individual es independiente del tiempo y del número de átomos presentes que todavía no se han desintegrado, podemos designar por λ la probabilidad de desintegración de un átomo por unidad de tiempo, siendo λ una constante independiente de t y de $N(t)$. El número de átomos que se desintegran entre los instantes t y $t + \Delta t$ es $N(t) - N(t + \Delta t)$. En el caso de un número muy grande de átomos, y despreciando la variación de $N(t)$ en Δt comparada con $N(t)$, este valor es igual a (la probabilidad de que un átomo se desintegre por unidad de tiempo) $\times$ (número de átomos presentes) $\times$ (intervalo de tiempo) $= \lambda N(t)\Delta t$. Así se encuentra:

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

En el límite $\Delta t \to 0$, se transforma en la ecuación diferencial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

La solución, con la condición límite $N(0) = N_i$, es

$$N(t) = N_i e^{-\lambda t}$$

(b) A partir de (a),

$$\lambda = \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{\Delta t N(t)}$$

$N(t)$ = número de núcleos de radio presentes $= \dfrac{6{,}02 \times 10^{23}}{226} = 2{,}66 \times 10^{21}$

$N(t) - N(t + \Delta t)$ = número de desintegraciones en $\Delta t = 3{,}72 \times 10^{10}$

$$\lambda = \frac{3{,}72 \times 10^{10}}{1 \text{ seg} \times 2{,}66 \times 10^{21}} = 1{,}40 \times 10^{-11} \text{ seg}^{-1}$$

De aquí que

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{1{,}40 \times 10^{-11} \text{ seg}^{-1}} = 4{,}95 \times 10^{10} \text{ seg}$$

Según la página 340 del texto: $T = 1622$ años.

$$T = 1622 \text{ años} \times (3{,}16 \times 10^{7} \text{ seg/año}) = 5{,}13 \times 10^{10} \text{ seg}$$

Para un estudio de la desintegración exponencial en mecánica cuántica ver *Quantum Mechanics* de Merzbacher, página 471.

1.3 En el caso de una rueda dentada típica en el interior de un reloj, los valores serán del orden de $m \simeq 0{,}1$ g, $r \simeq 3$ mm y $\omega \simeq 1$ rad/seg. El momento cinético sería:

$$J = I\omega = mr^2\omega \simeq (1 \text{ gm}) \times (0{,}09 \text{ cm}^2) \times (1 \text{ rad/seg}) \simeq 0{,}01 \text{ erg-seg}$$

$$\frac{h}{J} \sim \frac{10^{-26} \text{ erg-seg}}{10^{-2} \text{ erg-seg}} = 10^{-24}$$

Los efectos cuánticos serían de un valor relativo de 10^{-24}, lo cual es totalmente despreciable.

1.4 Deseamos encontrar una magnitud asociada al circuito con dimensiones de erg-seg. Una magnitud de este tipo es la energía/frecuencia, siendo el numerador la energía eléctrica almacenada en el circuito y el denominador la frecuencia natural del mismo.

$$C = 10^{-10}\ F \qquad L = 10^{-4}\ H \qquad V_{max} = 10^{-3}\ V$$

$$E = \tfrac{1}{2} C(V_{max})^2 = \tfrac{1}{2}(10^{-10} F) \times (10^{-3} V)^2 = 5 \times 10^{-17} \text{ joule}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} H \times 10^{-10} F}} = 10^7 \text{ seg}^{-1}$$

$$\frac{E}{\omega_0} = \frac{5 \times 10^{-17} \text{ joule}}{10^7 \text{ seg}^{-1}} = 5 \times 10^{-24} \text{ joule-seg}$$

$$\frac{h}{E/\omega_0} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34} \text{ joule-seg}}{5 \times 10^{-24} \text{ joule-seg}} \sim 10^{-10}$$

El valor relativo de los efectos cuánticos es 10^{-10}, que resulta despreciable.

1.5 Número de fotones emitidos por segundo:

$$= \frac{P}{h\nu} = \frac{10^3 \text{ joule/seg}}{(6{,}6 \times 10^{-34} \text{ joule-seg}) \times (10^6 \text{ seg}^{-1})} \sim 10^{30} \text{ fotones/seg}$$

1.6 Número de fotones emitidos por segundo $= \dfrac{P}{hc/\lambda} = \dfrac{\lambda P}{hc} =$

$$= \frac{(5{,}6 \times 10^{-7} \text{ m}) \times (0{,}01 \text{ joule/seg})}{(6{,}6 \times 10^{-34} \text{ joule-seg}) \times (3{,}0 \times 10^8 \text{ m/seg})} = 2{,}8 \times 10^{16} \text{ fotones/seg}$$

Para calcular el número de fotones que entran en el ojo, imaginemos una gran esfera centrada en el foco luminoso con radio igual a su distancia al ojo. El cociente entre el número de fotones que entran en el ojo y el número total de fotones emitidos es el mismo que el cociente entre el área de la pupila y el área total de la esfera. De aquí que,

número de fotones que entran en el ojo por segundo =

$$= \text{número total emitidos por segundo} \times \frac{\text{área del ojo}}{\text{área de la esfera}} =$$

$$= (2{,}8 \times 10^{16} \text{ fotones/seg}) \times \frac{\pi\,(2 \text{ mm})^2}{4\pi\,(100 \text{ m})^2} = 2{,}8 \times 10^{6} \text{ fotones/seg}$$

1.7 Admitamos que el diámetro de la pupila es 4 mm.

potencia que entra en el ojo $= 10^{-6}$ lumen/m^2 $\times\ \pi\ (2 \text{ mm})^2 = 1{,}26 \times 10^{-11}$ lumen $=$

$$= 1{,}26 \times 10^{-11} \text{ lumen} \times 0{,}0016 \text{ watt/lumen} = 2{,}02 \times 10^{-14} \text{ w}$$

$$\text{número de fotones por segundo} = \frac{P}{hc/\lambda} = \frac{\lambda P}{hc} =$$

$$= \frac{(5{,}56 \times 10^{-7} \text{ m}) \times (2{,}02 \times 10^{-14} \text{ joule/seg})}{(6{,}63 \times 10^{-34} \text{ joule-seg}) \times (3{,}00 \times 10^{8} \text{ m/seg})} = 5{,}6 \times 10^{4} \text{ fotones/seg}$$

El tiempo de resolución o de persistencia del ojo en esta situación es de 1/20 segundo aproximadamente. El número de fotones que entran en el ojo en este intervalo es $1/20 \times (5{,}6 \times 10^4) = 2{,}8 \times 10^3$. La fluctuación media del número de fotones es $\sim \sqrt{N}$ (ver *Núcleos y partículas*, de Segrè, página 195, Editorial Reverté, S. A.). Por tanto,

$$\text{fluctuación relativa} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}8 \times 10^3}} = 1{,}9\ \%$$

La fluctuación relativa del número de fotones es demasiado pequeña como para explicar el centelleo observado. El centelleo se debe a variaciones de la densidad atmosférica. Las variaciones de densidad producen variaciones en el índice de refracción y como consecuencia desviaciones e interferencias en la luz de las estrellas. Los planetas subtienden un ángulo mayor; el área de la sección del haz luminoso de un planeta es suficientemente grande para que se compensen los efectos que producen las fluctuaciones. Para un estudio más completo ver la *Astronomy* de Baker, página 92.

1.8 (a) Ley de desplazamiento de Wien: $\lambda_{max}\, T = 0{,}2898$ cm °K

Para $T = 2500$°K,

$$\lambda_{max} = \frac{0{,}2898 \text{ cm °K}}{2500\text{°K}} = 1{,}16 \times 10^{-4} \text{ cm} = 11{,}600 \text{ Å}$$

que no está en el intervalo visible: 4000 — 7000 Å.

(b) Para deducir la ley de desplazamiento de Wien hemos de obtener el máximo de la distribución de Planck.

$$E(\lambda, T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

$$\left. \frac{\partial E(\lambda, T)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \lambda_{max}} = 0 \text{ implica } e^{-x} = 1 - \frac{x}{5}, \text{ donde } x = \frac{hc}{kT\lambda_{max}}$$

Esta ecuación debe resolverse numéricamente. Por simple inspección se ve que el máximo se presenta para x próximo a 5. De aquí que,

$$1 - \frac{x}{5} \simeq e^{-5} \qquad x \simeq 5(1 - e^{-5}) = 5(1 - 0{,}0067) = 4{,}97$$

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4{,}97 \times k} = 0{,}201 \times \frac{hc}{k}$$

que concuerda con la ecuación (39 b) del texto.

(c) Para hallar la emisión de energía total por unidad de tiempo de un radiador tipo cuerpo negro se debe integrar la distribución de Planck para todas las longitudes de ondas.

$$R(T) \propto \int_0^\infty d\lambda\, E(\lambda, T) = \int_0^\infty d\lambda \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} =$$

$$= 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \propto T^4$$

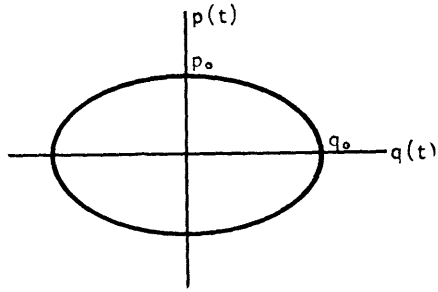
La dependencia con T se ha descompuesto en factores utilizando el cambio de variable $x = hc/\lambda kT$. Para un estudio de la radiación del cuerpo negro, ver *Fundamentos de Física Estadística y Térmica* de Reif, página 373.

1.9 (a) En el caso de un oscilador armónico de energía E, se tiene $q_0 = \sqrt{2E/K}$ y $p_0 = \sqrt{2mE}$. Así pues, $J = \pi q_0 p_0 = 2\pi \sqrt{m/K}\, E = E/\nu$, siendo ν la frecuencia natural del oscilador. Si E varía en una cantidad $nh\nu$, entonces J varía en una cantidad nh.

$$\Delta J = nh \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) La expresión que da la energía total relaciona $q(t)$ y $p(t)$. Es la ecuación de una elipse en el plano $q - p$.

$$E = \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{K\,q(t)^2}{2}$$



La variable acción $J = \pi q_0 p_0$ es el área de la elipse.

(c) A partir de las fórmulas vistas en (a) se tiene:

$$E = \pi\nu q_0 p_0 \qquad E = J\nu \text{ donde } \nu = \frac{\sqrt{K/m}}{2\pi}$$

La cuantización de Bohr del oscilador armónico se analiza en *Atomic Physics* de Born, página 115.

Capítulo 2

2.1. A partir del problema 1.2,

$$\text{número de átomos de radio que se desintegran} = \lambda \Delta t N = (\ln 2)\frac{\Delta t}{T} N =$$

$$= 0{,}693 \frac{1 \text{ hora}}{1622 \text{ años}} \frac{N_0}{226} = 2{,}16 \times 10^{-10} N_0$$

siendo N_0 el número de Avogadro.

$$\text{energía total emitida} = 100 \text{ cal} = 100 \frac{N_0}{23.050} \text{eV} = 4{,}34 \times 10^{-3} N_0 \text{ eV}$$

$$\text{energía media por desintegración} = \frac{\text{energía emitida}}{\text{número de desintegraciones}} =$$

$$= \frac{4{,}34 \times 10^{-3} N_0}{2{,}16 \times 10^{-10} N_0} \text{eV} = 20{,}1 \text{ meV}$$

La energía de las partículas alfa emitidas por el Ra^{226} es 4,8 meV, que es mucho menor que la energía observada por desintegración. La energía extra proviene de las desintegraciones sucesivas de los productos de desintegración. El número de desintegraciones subsiguientes en la muestra de radio aumenta con su edad. Finalmente, cuando se alcanza el equilibrio, el número de desintegraciones de cada producto de vida corta será igual al número de desintegraciones del radio.

2.2. (a) Como el defecto de masa del radio es positivo, está prohibida la desintegración espontánea del radio en protones y neutrones. Sin embargo, el radio puede desintegrarse en productos compuestos con tal que la suma de los defectos de masa de los productos sea mayor que el defecto de masa del radio.
(b) El radio se presenta de modo natural como parte de la cadena radiactiva ura-

nio-radio-plomo. El período tan grande del origen de la cadena (U^{238}, $T = 4{,}5 \times 10^9$ años) explica la presencia de miembros de la misma de vida corta. La cadena completa se da en la página 340 del texto.

2.3 A partir de la ecuación (14 b), (frecuencia)/(energía) = $2{,}4 \times 10^{14}$ (ciclos/seg)/(eV), se tiene

$$t\,(\text{en segundos}) = \frac{1}{2{,}4 \times 10^{14}\,E\,(\text{en eV})} = \frac{4{,}2 \times 10^{-21}}{E\,(\text{en meV})}$$

Las energías que intervienen en las desintegraciones nucleares son del orden de 1 meV, que corresponde a tiempos del orden de 10^{-21} seg, que es demasiado pequeño. En el texto se da otro valor estimado en la página 329.

2.4 (a) La energía radiada por el Sol en un año es

$$E = Pt = (3{,}86 \times 10^{26}\ \text{joule/seg})\ (3{,}16 \times 10^{7}\ \text{seg}) = 1{,}22 \times 10^{34}\ \text{joule}$$

Este valor corresponde a una masa dada por

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1{,}22 \times 10^{34}\ \text{joule}}{(3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/seg})^2} = 1{,}36 \times 10^{17}\ \text{kg}$$

La fracción de la masa del Sol radiada en un año es

$$\frac{m}{M} = \frac{1{,}36 \times 10^{17}\ \text{kg}}{1{,}98 \times 10^{30}\ \text{kg}} = 6{,}87 \times 10^{-14}$$

Por tanto, la fracción de la masa del Sol radiada en 4 000 millones de años es aproximadamente $(7 \times 10^{-14}\ \text{año}^{-1})\,(4 \times 10^{9}\ \text{años}) = 3 \times 10^{-4}$, que representa un cambio pequeño.

(b) La energía que interviene en las reacciones químicas es típicamente del orden de 20.000-200.000 cal/mol (sección 2.31 del texto). La masa del Sol es aproximadamente 2×10^{30} kg $\simeq 2 \times 10^{33}$ moles. Así pues, la máxima energía total liberada por los procesos químicos será $(2 \times 10^{5}$ cal/mol$)\,(2 \times 10^{33}$ moles$)$ (4 joule/cal) = $= 2 \times 10^{39}$ joules. A la velocidad dada en el texto, el sol radiará durante un tiempo

$$T = \frac{E}{P} \simeq \frac{2 \times 10^{39}\ \text{joule}}{4 \times 10^{26}\ \text{joule/seg}} = 5 \times 10^{12}\ \text{seg} = 160.000\ \text{años}$$

Este tiempo es demasiado corto.

(c) La fuente de energía del Sol es la reacción de fusión en la que se transfor-

man cuatro protones en núcleos de helio más positrones, neutrinos y rayos gamma. Las series de reacciones vienen dadas con detalle en *Astronomy* de Baker, pág. 375, y en *Núcleos y partículas* de E. Segrè (EDITORIAL REVERTÉ, S. A.). Para un valor estimado de la energía liberada, utilizaremos la energía correspondiente a la masa perdida en la transformación.

$$\Delta M = 4\,M_p - M_{He} = 4(1{,}00728 \text{ uma}) - 4{,}0026 \text{ uma} = 0{,}027 \text{ uma}$$

$$\Delta E = \Delta M c^2 = (0{,}027 \text{ uma})\, 930 \frac{\text{meV}/c^2}{\text{uma}} c^2 = 25 \text{ meV}$$

La energía total máxima que puede producir el Sol es

$$(6 \times 10^{23} \text{ protones/moles})\,(2 \times 10^{33} \text{ moles}) \frac{25 \text{ meV}}{4 \text{ protones}} =$$

$$= 7{,}5 \times 10^{57} \text{ meV} = 1{,}2 \times 10^{45} \text{ joule}$$

Con esta energía el Sol radiaría durante un tiempo

$$T = \frac{1{,}2 \times 10^{45} \text{ joules}}{4 \times 10^{26} \text{ joules/seg}} = 3 \times 10^{18} \text{ seg} = 100.000 \text{ millones de años}$$

que es consistente con la edad conocida del Sol.

2.5

$$\text{Densidad} = \frac{M}{V} = \frac{A(1 \text{ uma})}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{A(1{,}66 \times 10^{-24} \text{ gm})}{\frac{4}{3}\pi(1{,}2 \times 10^{-13} \text{ cm } A^{1/3})^3} = 2{,}3 \times 10^{14} \text{ gm/cm}^3$$

2.6. (a) En el caso del nitrógeno a temperatura ambiente

$$E_{kin} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2}(1/40) \text{ eV} = 0{,}038 \text{ eV} = 6{,}1 \times 10^{-14} \text{ erg}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E}{Mc^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}038 \text{ eV}}{28 \times 930 \text{ meV}}} = 1{,}7 \times 10^{-6}$$

$$v = (1{,}7 \times 10^{-6})\,(3{,}00 \times 10^{10} \text{ cm/seg}) = 5{,}1 \times 10^{4} \text{ cm/seg}$$

(b) El valor estimado para este problema se obtiene en la sección 3.45 del texto.

$$\text{frecuencia de colisión} = (2 \times 10^9 \text{ seg}^{-1}) \times \frac{P}{1 \text{ atm}} \times \sqrt{\frac{1}{A}\frac{273 \text{ °K}}{T}}$$

$$= (2 \times 10^9 \text{ seg}^{-1}) \times \sqrt{\frac{1}{28}\frac{273}{293}} = 3{,}6 \times 10^8 \text{ seg}^{-1}$$

Una frecuencia óptica típica es

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{10} \text{ cm/seg}}{6000 \text{ Å}} = 5 \times 10^{14} \text{ ciclos/seg}$$

$$\frac{\text{frecuencia de colisión}}{\text{frecuencia óptica}} = \frac{3{,}6 \times 10^8 \text{ seg}^{-1}}{5 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}} = 7{,}2 \times 10^{-7}$$

2.7 Sabemos a partir de la mecánica clásica que puede tenerse en cuenta el movimiento del núcleo sustituyendo la masa del electrón por la masa del sistema electrón-núcleo. A partir de la discusión semiclásica de la sección 2.23 del texto, vemos que la energía del electrón, $E = Cm$. Así pues, es de esperar que seamos capaces de explicar la masa nuclear finita con estas relaciones:

$$E_H = C\mu_H \simeq Cm\left(1 - \frac{m}{M_H}\right) \qquad E_D = C\mu_D \simeq Cm\left(1 - \frac{m}{M_D}\right)$$

Eliminando Cm de las ecuaciones y utilizando $m/M_H = 1/1836$ y $\lambda = hc/E$, se obtiene la expresión:

$$\frac{M_H}{M_D} = 1 - 1835\,\frac{\lambda_H - \lambda_D}{\lambda_D}$$

$$\frac{M_H}{M_D} = 1 - 1835\,\frac{4861{,}320 \text{ Å} - 4859{,}975 \text{ Å}}{4859{,}975 \text{ Å}} = 1 - 1835(2{,}768 \times 10^{-4}) = 0{,}492$$

$$\frac{M_D}{M_H} = 2{,}03$$

De la tabla 4A, se tiene

$$\frac{M_D}{M_H} = \frac{2{,}014 \text{ uma}}{1{,}007 \text{ uma}} = 2{,}00$$

La corrección de masa nuclear finita se discute en el texto, sección 8.46.

2.8 A partir de los razonamientos dados en el texto, sabemos que la energía del

electrón en un átomo del tipo hidrógeno es proporcional a Z^3. Lo mismo deberá ser cierto en caso de diferencia de energía: $\Delta E = CZ^2$.

$$\frac{\Delta E_{He^+}}{\Delta E_H} = 4 \quad \text{o bien} \quad \frac{\lambda_{He^+}}{\lambda_H} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_{He^+} = \frac{1}{4}\lambda_H = \frac{6562{,}99\ \text{Å}}{4} = 1640{,}75\ \text{Å}$$

Este valor no está en el intervalo visible: 4000 — 7000 Å.

2.9 Cuando una partícula alfa alcanza la superficie nuclear se tiene

$$E = \frac{(Ze)\,(2e)}{r} = \frac{(1/2)\,(Ae)\,(2e)}{r_0 A^{1/3}} = \frac{e^2}{r_0} A^{2/3}$$

$$r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13}\ \text{cm} = \frac{e^2}{mc^2}\frac{1{,}2 \times 10^{-13}\ \text{cm}}{2{,}8 \times 10^{-13}\ \text{cm}} = 0{,}43\,\frac{e^2}{mc^2}$$

$$E = \frac{mc^2}{0{,}43} A^{2/3} = \frac{0{,}51\ \text{meV}}{0{,}43} A^{2/3} = A^{2/3}\,(1{,}2\ \text{meV})$$

2.10 (a) La energía electrostática de una esfera cargada uniformemente (véase página 14 del texto) es $(3/5)\,(Q^2/r)$. Por tanto,

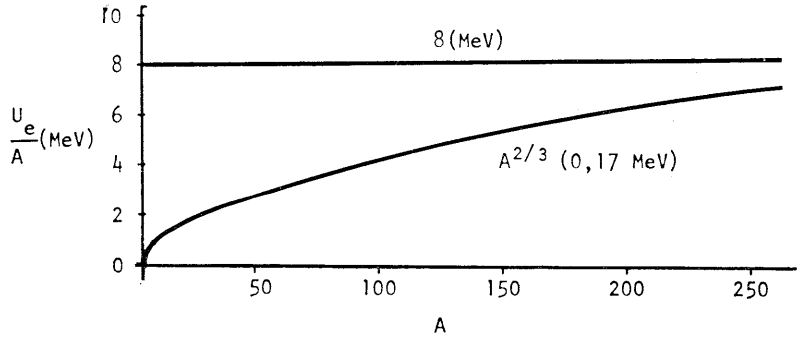
$$U_e \simeq \frac{3}{5}\frac{Q^2}{r} = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{r_0 A^{1/3}} = A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}$$

Según el problema 2.9, $e^2/r_0 = 1{,}2$ meV. Por tanto

$$U_e \simeq A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \times (0{,}7\ \text{meV})$$

Para $A \simeq 2Z$

$$\frac{U_e}{A} \simeq A^{2/3} \times (0{,}17\ \text{meV})$$



(b) $M(17;9) - M(17;8) = 3{,}0 \times 10^{-3}$ uma $= 2{,}79$ meV/c^2

Con objeto de hallar la diferencia de energía electrostática, puede tenerse en cuenta la diferencia de masa neutrón-protón.

$$M(17;9) - M(17;8) + (M_n - M_p) =$$
$$= 2{,}79 \text{ meV}/c^2 + (939{,}55 \text{ meV}/c^2 - 938{,}26 \text{ meV}/c^2 = 4{,}08 \text{ meV}/c^2$$
$$U_e(17;9) - U_e(17;8) =$$
$$= (9^2 - 8^2)\ 17^{-1/3} \times 0{,}7 \text{ meV} = 17^{2/3} \times 0{,}7 \text{ meV} = 4{,}6 \text{ meV}$$

Concuerdan bien con la realidad.

2.11 (a) 1 gm de U^{235} contiene $(6{,}02 \times 10^{23})/235$ núcleos $= 2{,}56 \times 10^{21}$ núcleos. Si sufriese fisión 1 gm de U^{235}, la energía liberada sería

$$(200 \text{ meV/núcleo})\,(2{,}56 \times 10^{21} \text{ núcleos}) = 5{,}12 \times 10^{23} \text{ meV} =$$
$$= 8{,}19 \times 10^{10} \text{ joules} = 2{,}28 \times 10^{4} \text{ kilowatios-hora} = 1{,}96 \times 10^{10} \text{ cal}$$

Energías típicas para reacciones químicas son de 20.000 a 200.000 cal/mol, o sea de 1.000 a 10.000 cal/gm para $A \simeq 20$.

(b) En un trozo pequeño de uranio, los neutrones expulsados en una fisión no llegarían a producir, en valor medio, una fisión adicional antes de escapar, debido al número pequeño de núcleos blancos posibles. Sin embargo, si el trozo de uranio es suficientemente grande, los neutrones producidos en una fisión producirán, en valor medio, más de una fisión adicional, siguiendo una reacción en cadena.

(c) Admitamos que el U^{235} rompe en dos trozos aproximadamente iguales.

$$U_e = \frac{Z^2}{A^{1/3}}(0{,}7 \text{ meV})$$

$$\Delta U_e = \frac{Z^2}{A^{1/3}} \times (0{,}7 \text{ meV}) - 2\frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} \times (0{,}7 \text{ meV}) =$$

$$= (1 - (1/2)^{2/3})\frac{(92)^2}{(235)^{1/3}} \times (0{,}7 \text{ meV}) = 355 \text{ meV}$$

La fisión se estudia en *Núcleos y partículas* de E. Segrè (EDITORIAL REVERTÉ, S. A.).

2.12 (a) $\Delta M = 2M_D - M_{He} = 2(2{,}014 \text{ uma}) - 4{,}002 \text{ uma} = 0{,}026 \text{ uma}$

$$\Delta E = \Delta M c^2 = (0{,}026 \text{ uma})\left(930 \frac{\text{meV}/c^2}{\text{uma}}\right) c^2 = 24 \text{ meV}$$

$$E = (24 \text{ meV})(6 \times 10^{23})/4 = 3{,}6 \times 10^{24} \text{ meV} = 5{,}8 \times 10^{11} \text{ joules}$$

Combinando este resultado con el del problema 2.11 (a), se tiene:

$$\frac{\text{energía liberada por 1 gm de } H^2 \text{ al sufrir fusión}}{\text{energía liberada por 1 gm de } U^{235} \text{ al sufrir fisión}} = \frac{3{,}6 \times 10^{24} \text{ meV}}{5{,}12 \times 10^{23} \text{ meV}} = 7$$

(b) La repulsión electrostática de los núcleos de deuterio evita la fusión espontánea a temperatura ambiente. A temperaturas extremadamente elevadas, es decir, a grandes velocidades, pueden interaccionar los núcleos de deuterio. Debido al efecto túnel mecánico cuántico (ver sección 7.45) la reacción puede ocurrir a temperaturas que son más bajas de lo que sería de esperar si se utilizasen ideas clásicas.

2.13 (a) Un electrón en su órbita tiene un momento magnético

$$\mu = \frac{e}{2mc} L = \frac{e\hbar}{2mc} =$$

$$= \frac{(4{,}80 \times 10^{-10} \text{ ues})(1{,}05 \times 10^{-27} \text{ erg-seg})}{2(9{,}11 \times 10^{-28} \text{ gm})(3{,}00 \times 10^{10} \text{ cm/seg})} = 9{,}27 \times 10^{-21} \text{ ues cm}$$

(b) $$\Delta W = 2\mu B = \frac{e\hbar}{2mc} B = 2(9{,}27 \times 10^{-21} \text{ erg/gauss})(1000 \text{ gauss}) =$$

$$= (1{,}85 \times 10^{-17} \text{ erg})(6{,}24 \times 10^{11} \text{ eV/erg}) = 1{,}15 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

(c) Según el *Handbook of Chemistry and Physics*, el volumen molar del cristal del hierro es 7,09 cm^3. La densidad es $8{,}49 \times 10^{22}$ átomos/cm^3. La imanación vale

$$M = \mu \times \text{densidad} = (9{,}27 \times 10^{-21}\ \text{erg/gauss})(8{,}49 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}) = 787\ \frac{\text{erg}}{\text{gauss-cm}^3}$$

En un ferromagneto saturado, $M = 1830$ erg/(gauss-cm^3); ver *Electricidad y Magnetismo* volumen II de Berkeley Physics Course, pág. 395 (Editorial Reverté). Existe una buena discusión del ferromagnetismo en *The Feynman Lectures*, volumen II, secciones 36 y 37.

2.14† Despreciemos las variaciones de las constantes (relacionadas en las secciones 51-56) que dependen débilmente de α y β. Utilicemos la siguiente notación:

$$m[kg_p] = \frac{m}{1\ kg_p} \qquad \text{o sea} \qquad m = m[kg_p]\ kg_p$$

$m[kg_p]$ es un número adimensional que es el cociente entre la masa m y la masa del kilogramo de Paris.

(a)

$$\frac{1\ m_p'}{1\ m_a'} = \frac{n_4 c_4 (\alpha')^{-1} \left(\frac{\hbar'}{m'c'}\right)}{n_2 c_2 (\alpha')^{-2} \left(\frac{\hbar'}{m'c'}\right)} = (1+u)\frac{n_4 c_4 \alpha^{-1} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)}{n_2 c_2 \alpha^{-2} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)} = (1+u)\frac{1\ m_p}{1\ m_a}$$

(b)
$$1\ kg_p' = n_1 c_1 M_p' = n_1 c_1 (\beta')^{-1} m'$$

$$1\ gm_p' = \frac{n_1 c_1}{1000} M_p' = \frac{n_1 c_1}{1000} (\beta')^{-1} m'$$

$$m'[gm_p'] = \frac{m'}{1\ gm_p'} = \frac{1000}{n_1 c_1}\beta' = (1+w)\, m[gm_p]$$

(c)

$$\frac{1\ m_a'}{1\ \text{seg}_a'} = \frac{n_2 c_2 (\alpha')^{-2} \left(\frac{\hbar'}{m'c'}\right)}{n_3 c_3^{-1} (\alpha')^{-4} (\beta')^{-1} \left(\frac{\hbar}{m'(c')^2}\right)} = \frac{n_2 c_2}{n_3 c_3^{-1}} (\alpha')^2 \beta' c'$$

$$c'[m_a'/\text{seg}_a'] = \frac{c'}{1\ m_a'/\text{seg}_a'} =$$

$$= \frac{n_3 c_3^{-1}}{n_2 c_2} (\alpha')^{-2} (\beta')^{-1} = (1+u)^{-2}(1+w)^{-1} c[m_a/\text{seg}_a]$$

(d)

$$\hbar'[kg_p' - (m_a')^2/\text{seg}_a'] = \frac{\hbar'}{1\,\dfrac{kg_p' - (m_a')^2}{\text{seg}_a'}} =$$

$$= \hbar' \frac{n_3 c_3^{-1}(\alpha')^{-4}(\beta')^{-1}\left(\dfrac{\hbar'}{m'(c')^2}\right)}{(n_1 c_1(\beta')^{-1} m')\left[n_2 c_2(\alpha')^{-2}\left(\dfrac{\hbar'}{m'c'}\right)\right]^2} =$$

$$= \hbar[kg_p - m_a^2/\text{seg}_a]$$

$$\hbar'[kg_p' - (m_p')^2/\text{seg}_a'] = \frac{\hbar'}{1\,\dfrac{kg_p' - (m_p')^2}{\text{seg}_a'}} =$$

$$= \left(\frac{1\ m_a'}{1\ m_p'}\right)^2 \frac{\hbar'}{1\,\dfrac{kg_p' - (m_a')^2}{\text{seg}_a'}} = (1+u)^{-2}\left(\frac{1\ m_a}{1\ m_p}\right)^2 \frac{\hbar}{1\,\dfrac{kg_p - m_a^2}{\text{seg}_a}} =$$

$$= (1+u)^{-2}\,\hbar[kg_p - m_p^2/\text{seg}_a]$$

(e) En unidades electrostáticas $\alpha = e^2/\hbar c$, o sea $e\sqrt{\alpha\hbar c}$.

$$e'[\text{ues}'] = \sqrt{\alpha'\,\hbar'[gm_p' - (cm_a')^2/\text{seg}_a']}\ c'[cm_a'/\text{seg}_a'] =$$

$$= \sqrt{(1+u)\alpha\ \hbar[gm_p - cm_a^2/\text{seg}_a](1+u)^{-2}(1+w)^{-1}}\ c[cm_a/\text{seg}_a] =$$

$$= (1+u)^{-1/2}(1+w)^{-1/2}\,e[\text{ues}]$$

En el sistema MKS, $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c)$. Se define el coulomb en este sistema en función de la fuerza que se ejerce entre unos conductores por los que circula corriente, teniendo μ_0 un valor fijo determinado.

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{4\pi\hbar} \qquad e = \sqrt{\frac{4\pi\alpha\hbar}{\mu_0 c}}$$

$$e'[\text{MKS}'] = \sqrt{\frac{4\pi\alpha'\,\hbar'[kg_p' - (m_a')^2/\text{seg}_a']}{\mu_0\, c'[m_a'/\text{seg}_a']}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi(1+u)\alpha\ \hbar[kg_p - m_a^2/\text{seg}_a]}{\mu_0(1+u)^{-2}(1+w)^{-1}\,c[m_a/\text{seg}_a]}} =$$

$$= (1+u)^{3/2}(1+w)^{1/2}\,e[\text{MKS}]$$

(f) La masa de un bloque metálico medido en kilogramos de París no se verá

cambiada puesto que el número de protones que contiene no varía. Las dimensiones lineales del bloque de metal medidas con el metro de París también serán invariables, puesto que este metro sufrirá las mismas variaciones que el bloque de metal. Así pues,

$$\rho'[gm_p'/(cm_p')^3] = \rho[gm_p/cm_p^3]$$

$$\rho'[gm_p'/(cm_a')^3] = \frac{\rho'}{1\ gm_p'/(cm_a')^3} = \frac{1\ (cm_a')^3}{1\ (cm_p')^3}\,\frac{\rho'}{1\ gm_p'/(cm_p')^3} =$$

$$= (1+u)^{-3}\,\frac{1\ cm_a^3}{1\ cm_p^3}\,\frac{\rho}{1\ gm_p/cm_p^3} = (1+u)^{-3}\,\rho[gm_p/cm_a^3]$$

Capítulo 3

3.1 (a) Entre los números de ondas pueden encontrarse las siguientes relaciones:

$$\tilde{\nu}_{10} = \tilde{\nu}_9 - \tilde{\nu}_8 = \tilde{\nu}_7 - \tilde{\nu}_6 = \tilde{\nu}_4 - \tilde{\nu}_3$$

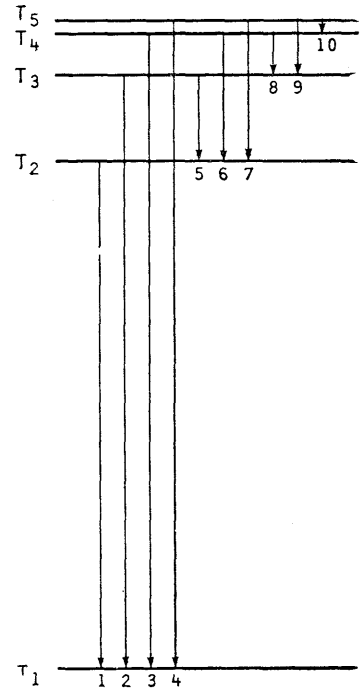
$$\tilde{\nu}_9 = \tilde{\nu}_7 - \tilde{\nu}_5 = \tilde{\nu}_4 - \tilde{\nu}_2$$

$$\tilde{\nu}_8 = \tilde{\nu}_6 - \tilde{\nu}_5 = \tilde{\nu}_3 - \tilde{\nu}_2$$

$$\tilde{\nu}_7 = \tilde{\nu}_4 - \tilde{\nu}_1$$

$$\tilde{\nu}_6 = \tilde{\nu}_3 - \tilde{\nu}_1$$

$$\tilde{\nu}_5 = \tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1$$



(b) T_1 es arbitrario

$$T_2 = T_1 + \tilde{\nu}_1$$

$$T_3 = T_1 + \tilde{\nu}_2$$

$$T_4 = T_1 + \tilde{\nu}_3$$

$$T_5 = T_1 + \tilde{\nu}_4$$

(c) La fórmula más sencilla para estos niveles es precisamente la de los términos del hidrógeno:

$$T_n = -\frac{1}{n^2} \times 109.667{,}6 \text{ cm}^{-1}$$

El esquema de términos para el hidrógeno aparece en la página 387.

3.2 (a) El resultado (a) es precisamente la dispersión de resonancia (fluorescencia de resonancia) de la luz por los átomos del hidrógeno.

En el caso (b) no existe ninguna dispersión resonante porque no hay ninguna diferencia de energía en correspondencia en el talio.

En el caso (c) la raya del mercurio es dispersada como en (a). Los rayos del talio se deben a la fluorescencia "sensibilizada" que es un fenómeno en el que un átomo de mercurio en el recipiente *C*, en el estado excitado por la luz de 2537 Å choca con un átomo de talio y le transfiere su energía de excitación dejándolo en un estado excitado. El exceso de energía pasa a energía cinética de ambos átomos. Los átomos de talio, excitados por este proceso, decaen a continuación y emiten el espectro característico del talio.

La placa de vidrio entre el recipiente *C* y la lámpara evita la dispersión, porque el vidrio es opaco a la luz de 2537 Å (ultravioleta).

(d) La gran anchura de la raya de 3776 Å se debe al ensanchamiento doppler. Los átomos de talio excitados mediante la fluorescencia sensibilizada tienen una energía cinética mayor que la energía cinética media debida al movimiento térmico. La energía cinética extra procede de la energía que queda cuando un átomo de mercurio excitado transfiere su energía a un átomo de talio cuya energía de excitación es menor. Cuanto más pequeña sea la energía de excitación del átomo de talio, mayor será el exceso de energía disponible y así resultará más ancha la raya resultante.

Obsérvese con referencia al esquema de término de la figura 34 A, que la energía de excitación del nivel de mercurio interesado está ligeramente por encima del nivel del talio $8^2S_{1/2}$ (relativo al fundamental). Por tanto, algunas rayas del talio se pierden, porque no pueden excitarse niveles superiores.

La fluorescencia sensibilizada se estudia en *Resonance Radiation and Excited Atoms* de Mitchell y Zemansky, página 59.

3.3

$$\lambda = 5896\ \text{Å} \qquad \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = 16.960\ \text{cm}^{-1}$$

(a) Anchura natural:

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{\Delta\omega}{2\pi c} = \frac{1}{2\pi c\tau} = \frac{1}{2\pi(3 \times 10^{10}\ \text{cm/seg})10^{-8}\ \text{seg}} = 0{,}00053\ \text{cm}^{-1}$$

(b) Ensanchamiento Doppler:

$$\frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} = \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq (0{,}52 \times 10^{-5})\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{T}{293\ °\text{K}}\right)} =$$

$$= (0{,}52 \times 10^{-5})\sqrt{\frac{1}{23}\frac{473\ °\text{K}}{293\ °\text{K}}} = 1{,}4 \times 10^{-6}$$

$$\Delta\tilde{\nu} = (1{,}4 \times 10^{-6})\,(16.960\ \text{cm}^{-1}) = 0{,}024\ \text{cm}^{-1}$$

(c) Ensanchamiento por colisiones:

$$(\Delta\tilde{\nu})_c = \frac{(\Delta\omega)_c}{2\pi c} \simeq \frac{1}{2\pi c}(2 \times 10^9\ \text{seg}^{-1})\left(\frac{P}{1\ \text{atm}}\right)\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{273\ ^\circ\text{K}}{T}\right)} =$$

$$= \frac{(2 \times 10^9\ \text{seg}^{-1})}{2\pi(3 \times 10^{10}\ \text{cm/seg})}\left(\frac{10\ \text{mm Hg}}{760\ \text{mm Hg}}\right)\sqrt{\frac{1}{23}\,\frac{273\ ^\circ\text{K}}{473\ ^\circ\text{K}}} = 0{,}000022\ \text{cm}^{-1}$$

Puede mejorarse la exactitud del valor calculado utilizando los radios atómicos aproximados, en lugar de a_0, al calcular la frecuencia de colisión. Los radios son

$$r_{Na} = 1{,}9\ \text{Å} \qquad r_A = 1{,}5\ \text{Å}$$

Sustituyamos $\pi(2a_0)^2 \rightarrow \pi(r_{Na} + r_A)^2$, lo que incluye un factor

$$\frac{(r_{Na} + r_A)^2}{(2a_0)^2} = \frac{(1{,}9\ \text{Å} + 1{,}5\ \text{Å})^2}{(2 \times 0{,}53\ \text{Å})^2} \simeq 10$$

La anchura del ensanchamiento de colisión resulta ser entonces

$$(\Delta\tilde{\nu})_c \simeq 0{,}00022\ \text{cm}^{-1}$$

Debido a la naturaleza aproximada de la estimación, este valor es todavía un poco pequeño comparado con los resultados experimentales (ver Mitchell y Zemansky, *Resonance Radiation and Excited Atoms,* página 166).

Estructura fina:

$$D_1\text{:}\quad \lambda_1 = 5895{,}930\ \text{Å} \qquad \tilde{\nu}_1 = 16.960{,}85\ \text{cm}^{-1}$$

$$D_2\text{:}\quad \lambda_2 = 5889{,}963\ \text{Å} \qquad \tilde{\nu}_2 = 16.978{,}04\ \text{cm}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1 = 17{,}2\ \text{cm}^{-1}$$

Todas las anchuras son pequeñas comparadas con la estructura fina.

(d) No. Puesto que la inmensa mayoría de los átomos están en el estado fundamental (ver problema 3.5), sólo serán dispersadas las frecuencias que corresponden a transmisiones en las que interviene el estado fundamental.

3.4 El gráfico inferior de la figura para este problema muestra el espectro que resulta de un fenómeno denominado "autoinversión". La autoinversión aparece en la luz emitida por un tubo de descarga gaseosa en el que existe una región central de gas excitado caliente rodeado por gas frío sin excitar. El gas caliente emite luz con una gran anchura doppler. Esta luz pasa a través del gas frío antes de salir del tubo de descarga. El gas frío absorbe luz que pasa a su través, pero el espectro de absorción del gas no tiene una anchura doppler más pequeña.

Así pues, una raya emitida por el tubo tiene un espectro ancho pero con la parte central perdida, como se ve en el gráfico.

Los átomos de gas frío están en el estado fundamental y así sólo dispersan luz que se obtiene a partir de las transiciones a dicho estado.

Puede verse una explicación de la autoinversión y descripciones de fuentes luminosas que no tienen dicho efecto en *Resonance Radiation and Excited Atoms* de Mitchell y Zemansky, páginas 20-31.

3.5 A partir del esquema de términos de la figura 32 A se tiene

$$E_1 - E_0 = 2{,}1 \text{ eV}$$

$$\frac{E_1 - E_0}{kT} = \frac{2{,}1 \text{ eV}}{(8{,}6 \times 10^{-5} \text{ eV/°K})473 \text{ °K}} = 52$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_0}{kT}\right) = \exp(-52) = 2{,}6 \times 10^{-23}$$

3.6 (a) Puede determinarse C a partir de un punto del gráfico, por ejemplo, $Z = 35$, $\lambda = 1{,}03$ Å.

$$C = \lambda Z^2 \tilde{R}_\infty = (1{,}03 \times 10^{-8} \text{ cm})\,(35)^2(1{,}097 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}) = 1{,}38$$

(b) El electrón incidente debe tener una energía suficiente por lo menos para golpear el electrón más interior lanzándolo a un nivel no ocupado. En un átomo con muchos electrones, la energía del nivel no ocupado más bajo está próxima a cero. Utilizando los niveles energéticos de Bohr se encuentra

$$E \gtrsim 0 - E_1 \simeq \frac{4}{3}(E_2 - E_1) = \frac{4}{3}\hbar\omega$$

3.7 En el modelo de Bohr:

(I) $$J = mvr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(II) $$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}$$

(III) $$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

Combinando (I), (II) y (III) se tienen los niveles energéticos del hidrógeno:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{e^2}{2a_0} \qquad \text{donde} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

El esquema de términos del hidrógeno se indica en la página 340.

Las frecuencias de transición vienen dadas por

$$\hbar\omega = E_m - E_n = \frac{e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Las longitudes de onda relacionadas en el problema están en la serie de Balmer, es decir, en las rayas que se obtienen de transiciones al nivel $n = 2$. En particular vienen dadas por $n = 2$ y $m = 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 respectivamente. En la tabla que damos a continuación se comparan los valores medidos y los calculados.

$$\tilde{\nu} = \frac{\omega}{2\pi c} = \frac{e^2}{4\pi a_0 \hbar c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \tilde{R}_\infty\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

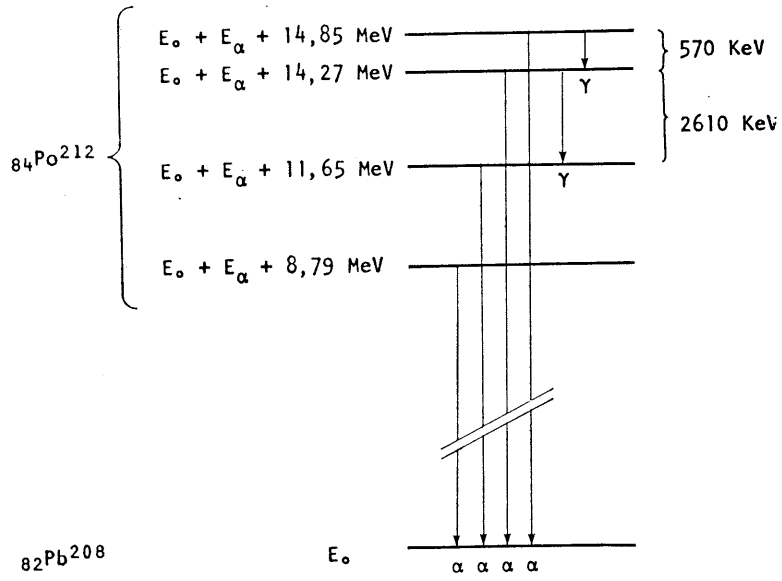
$$= 109\,737{,}31 \text{ cm}^{-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)$$

m	$\tilde{\nu}$ [en cm^{-1}]	λ [en Å] calculados	λ [en Å] medidos
4	20575,7	4860,1	4861,3
5	23044,8	4339,4	4340,5
6	24386,1	4100,7	4101,7
7	25194,8	3969,1	3970,1
8	25719,7	3888,1	3889,1
9	26079,5	3834,4	3835,4

3.8 En el *Handbook of Chemistry and Physics* se encuentran los datos siguientes:

Isótopo	Período de semidesintegración	Energías α (MeV)	Energías λ (keV)
$_{84}Po^{212m}$	45 seg	11,65 14,27 14,85	570 2610
$_{84}Po^{212}$	$3{,}04 \times 10^{-7}$ seg	8,785	
$_{84}Pb^{208}$			

Estos datos se ajustan al esquema de términos siguiente:



Las diversas energías de las partículas α se obtienen a partir de los diferentes niveles posibles de los núcleos antecesores.

3.9 La curva descrita en el problema es un gráfico de la sección recta para la reacción

$$Li^7 + \alpha \rightarrow B^{11*}$$

En la que a continuación se desintegra el núcleo de B^{11*}. La escala vertical del gráfico es la energía cinética en el laboratorio de la partícula alfa y la escala horizontal es la sección recta en unidades arbitrarias. Los picos de la curva dan la situación de los niveles excitados de los núcleos de B^{11*}, es decir, la posición de las resonancias en la sección recta de dispersión.

La notación $B^{11} + p - p'$ se refiere a la reacción

$$B^{11} + p \rightarrow B^{11*} + p$$

La altura de la barra horizontal es el exceso de energía (valor Q) de la reacción, que en este caso es cero. La flecha vertical señala la energía más elevada

a que se ha observado la reacción y las flechas inclinadas señalan los estados finales del núcleo B^{11} que se han observado en la misma.

El modelo del núcleo compuesto y los diagramas de este tipo se estudian en *Nuclei and Particles* de E. Segrè, página 442.

3.10 (a) Los átomos del haz decaen con independencia y con una cierta probabilidad por unidad de tiempo. Se aplica la deducción dada en el problema 1.2 y tiene el decaimiento exponencial de la intensidad en el caso de muchos átomos.

$$\text{velocidad de desintegración} = \frac{dN}{dt} \propto \mathrm{I} \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\tau}\frac{x}{v}\right)$$

(b) El potencial de frenado crítico (a partir del cual deja de registrar la célula) es una medida de la energía de los fotones, que se sabe experimentalmente que es proporcional a la frecuencia. La frecuencia de los fotones radiados permanece esencialmente constante como función del tiempo después de la excitación. En este experimento, el tiempo después de la excitación es proporcional a la distancia desde el punto de excitación a la rendija. De aquí que el potencial de frenado crítico sea esencialmente independiente de la distancia x.

Una persona que no estuviese familiarizada con los hechos experimentales podría esperar que el potencial de frenado crítico fuese una medida de la intensidad de los fotones. Esto le llevaría a esperar que el potencial de frenado crítico tuviese una relación exponencial con x.

$$V_0 \propto \mathrm{I} \propto \exp\left(-\frac{x}{\tau v}\right) \qquad (\text{¡Erróneo!})$$

3.11 El vector de campo eléctrico en el campo de radiación del dipolo es proporcional a la proyección, perpendicular a la dirección de observación, del vector dipolo.

$$E_1 \propto (\vec{m})_\perp = m \operatorname{sen} \theta$$

siendo θ el ángulo existente entre el vector dipolo y la dirección de observación. En *Ondas*, Berkeley Physics Course (EDITORIAL REVERTÉ, S. A.), se da una deducción de esta dependencia angular. Por tanto, la ecuación (50A)

$$E_1 = \frac{C \operatorname{sen} \theta}{r} \exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c} - t\right)\right]$$

y

$$I_{E_1}(\theta) \propto |E_1|^2 = A \operatorname{sen}^2\theta$$

En el caso del cuadripolo eléctrico,

$$E_2 \simeq i \left(\frac{a\omega}{c} \right) (\cos \theta) E_1$$

$$I_{E_2}(\theta) \propto |E_2|^2 = B(4 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta) = B \operatorname{sen}^2 2\theta$$

Capítulo 4

4.1 (a) El estado inicial lo forma una partícula en reposo con masa M_i. El estado final lo constituye una partícula con masa M_f y cantidad de movimiento p y un fotón con cantidad de movimiento $\hbar\omega/c$.

(i) Conservación de la cantidad de movimiento: $$0 = \frac{\hbar\omega}{c} - p$$

(ii) Conservación de la energía: $$M_i c^2 = \sqrt{c^2p^2 + M_f c^4} + \hbar\omega$$

Combinando (i) y (ii) y despejando ω, tenemos

$$\omega = \frac{c^2}{2\hbar}\frac{M_i^2 - M_f^2}{M_i} = \frac{M_i + M_f}{2M_i}\omega_0 = \omega_0\left[1 - \frac{\hbar\omega_0}{2M_i c^2}\right]$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{c^2}{\hbar}(M_i - M_f)$$

(b) Obsérvese que en ambos ejemplos, $\hbar\omega_0 \ll Mic^2$, es decir, el efecto relativo del retroceso es muy pequeño.

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \simeq \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\hbar\omega_0}{2M_i c^2}$$

Las rayas amarillas del sodio son las rayas D_1 y D_2 de la figura 32 A del capítulo 3; $\lambda \simeq 5890$ Å.

$$\hbar\omega_0 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{5890}\frac{hc}{1\text{Å}} = \frac{1{,}24 \times 10^4 \text{ eV}}{5890} = 2{,}10 \text{ eV}$$

$$M_i c^2 = (23{,}0 \text{ uma})\left(931 \frac{\text{MeV}/c^2}{\text{uma}}\right)c^2 = 2{,}14 \times 10^4 \text{ MeV}$$

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{2{,}10 \text{ eV}}{2(2{,}14 \times 10^4 \text{ MeV})} = 4{,}90 \times 10^{-11}$$

En el caso de los rayos gamma emitidos por el hafnio,

$$\hbar\omega_0 = 113 \text{ keV}$$

$$M_i c^2 = (177 \text{ uma})\,(931 \frac{\text{meV}/c^2}{\text{uma}})\,c^2 = 1{,}65 \times 10^5 \text{ meV}$$

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{113 \text{ keV}}{2(1{,}65 \times 10^5 \text{ meV})} = 3{,}42 \times 10^{-7}$$

4.2 El estado inicial está constituido por una partícula en reposo de masa M_f y un fotón con cantidad de movimiento $\hbar\omega/c$. El estado final lo forma una partícula de masa M_i y cantidad de movimiento p.

(i) Conservación de la cantidad de movimiento: $\dfrac{\hbar\omega}{c} = p$

(ii) Conservación de la energía: $\hbar\omega + M_f c^2 = \sqrt{M_i^2 c^4 + p^2 c^2}$

Combinando (i) y (ii) y despejando ω, se tiene

$$\omega = \frac{c^2}{2\hbar}\,\frac{M_i^2 - M_f^2}{M_f} = \frac{M_i + M_f}{2M_f}\,\omega_0 = \omega_0\left[\,1 + \frac{\hbar\omega_0}{2M_i c^2}\,\right]$$

donde $$\omega_0 = \frac{c^2}{\hbar}\left(\,M_i - M_f\,\right)$$

4.3 En el gráfico de la figura 23 A, la longitud de onda mínima es el valor de la abscisa para la cual tienden a cero las tres curvas que representan la intensidad. Inspeccionando el gráfico podemos ver que este valor está comprendido entre 0,35 Å y 0,36 Å. A partir de la ecuación (25a), $\lambda_{\min} = ch/\text{e}V_0$, se tiene:

$$\frac{h}{e} = \frac{\lambda_{\min} V_0}{c} = \frac{(0{,}355 \times 10^{-8} \text{ cm})\,(35.000 \text{ volts})}{3{,}00 \times 10^{10} \text{ cm/seg}} = 4{,}14 \times 10^{-15} \text{ volt-seg}$$

Como 1 stat volt = 300 volts,

$$\frac{h}{e} = 1{,}38 \times 10^{-17} \text{ erg-seg/ues}$$

Según las tablas,

$$\frac{h}{e} = \frac{6{,}626 \times 10^{-27} \text{ erg-seg}}{4{,}803 \times 10^{-10} \text{ ues}} = 1{,}380 \times 10^{-17} \text{ erg-seg/ues}$$

4.4 En los gráficos de la figura 20 A, el primer máximo es λ, y el segundo es λ' en donde

$$\lambda' = \lambda + 2\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)(1 - \cos\theta)$$

En el gráfico *C*:

$\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$ $\qquad$ $\lambda' - \lambda \simeq 1{,}3$ unidades a lo largo de la abscisa

De aquí que

$$\lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right) = 1{,}3\,u$$

Para el gráfico *B*:

$$\lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)(1 - \cos 45°) = (1{,}3\,u)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}39\,u$$

Para el gráfico *D*:

$$\lambda' - \lambda = 2\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)(1 - \cos 135°) = (1{,}3\,u)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2{,}2\,u$$

4.5 En la figura 16A, la escala inferior es el corrimiento Doppler, correspondiente a la velocidad indicada en la escala superior, para fotones con energía 14,4 keV.

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \simeq \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad \text{para } \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

De aquí que

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{v}{c}\nu = \frac{v}{c}\frac{14{,}4\text{ keV}}{h} = \frac{v}{c}(3{,}48 \times 10^{12}\text{ Mc})$$

Si se expresan v y c en mm/seg y $\Delta\nu$ en Mc,

$$\Delta\nu[\text{en Mc}] = \frac{v[\text{en mm/seg}]}{3{,}00 \times 10^{11}}(3{,}48 \times 10^{12}) = 11{,}6\ v[\text{en mm/seg}]$$

4.6 Como se menciona en el problema, la ausencia de un corrimiento de la frecuencia debido al retroceso es el efecto Mössbauer. Es una consecuencia de la incapacidad de los núcleos de Fe^{57} de retroceder libremente. Esencialmente, el

cristal completo retrocede con una velocidad despreciable. Puede verse la pequeñez del desplazamiento resultante utilizando la fórmula deducida en el problema 4.2, en donde la masa del denominador es la masa del cristal.

Además de las referencias citadas en el problema, mencionaremos el artículo "The Mössbauer Effect", por Sergio De Benedetti, en *Scientific American*. Abril 1960.

4.7 Esperamos ver dos longitudes de onda en la radiación dispersada. Una tiene la misma longitud de onda que la incidente, $\lambda = 0{,}710$ Å, debida a la dispersión de los rayos gamma en los electrones que permanecen ligados; la otra es la longitud de onda λ' debida al efecto Compton.

$$\lambda' = \lambda + 2\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)(1 - \cos\theta) =$$

$$= 0{,}710 \text{ Å} + (2{,}43 \times 10^{-2} \text{ Å})\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}722 \text{ Å}$$

4.8 El intervalo de energía de uno de los fotones es

$$0 < E_\gamma < mc^2$$

Para verlo, consideremos el estado final compuesto por tres fotones. Por la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, la energía total es $2mc^2$ y la cantidad de movimiento total es 0. Es posible tener una configuración en la que dos de los fotones tengan energía $\simeq mc^2$ y el tercero tenga una energía $\simeq 0$. Puede equilibrarse la cantidad de movimiento si las cantidades de movimiento de los dos fotones de alta energía están en sentidos casi opuestos. Una configuración de este tipo puede aproximarse a los límites dados anteriormente. Pueden presentarse realmente todos los valores entre ambos límites. $E_\gamma > mc^2$ es imposible porque no puede equilibrarse la cantidad de movimiento de un fotón de éstos.

4.9 (a) En el caso de un fotón en un dieléctrico, se tiene

$$E_d = E_{vac} \qquad \omega_d = \omega_{vac}$$

(b) Podemos asignar una cantidad de movimiento utilizando la cantidad de movimiento de una onda electromagnética clásica en un dieléctrico.

$$p_d = np_{vac}$$

Otro modo de asignar una cantidad de movimiento consiste en utilizar la relación de De Broglie

$$p_{\mathrm{d}} = \frac{h}{\lambda_{\mathrm{d}}} = \frac{h}{\lambda_{\mathrm{vac}}/n} = n\frac{h}{\lambda_{\mathrm{vac}}} = np_{\mathrm{vac}}$$

4.10 Obsérvese que en este problema $c = 1$.

Consideremos un proceso en el que una partícula emite un fotón al pasar por un dieléctrico.

El estado inicial se compone de una partícula con masa m y cantidad de movimiento p. El estado final se compone de una partícula con masa m y cantidad de movimiento p' y un fotón con frecuencia ω. Sea ϕ el ángulo formado por p y p' y θ el ángulo entre p y la cantidad de movimiento del fotón.

(i) Conservación de la energía: $\sqrt{m^2 + p^2} = \hbar\omega + \sqrt{m^2 + (p')^2}$

(ii) Conservación de la cantidad de movimiento: $p = n\hbar\omega \cos\theta + p' \cos\phi$

$0 = n\hbar\omega \operatorname{sen}\theta - p' \operatorname{sen}\phi$

De donde (ii)

$$\cos\theta = \frac{p^2 - (p')^2 + n^2\hbar^2\omega^2}{2pn\hbar\omega}$$

Según (i)

$$p^2 - (p')^2 = 2\hbar\omega\sqrt{m^2 + p^2} - \hbar^2\omega^2$$

Combinando estos resultados se tiene

$$\cos\theta = \frac{2E + (n^2 - 1)\hbar\omega}{2np}$$

siendo E la energía de la partícula. Para una partícula, $p/E = v_p$, y en el caso de fotones ópticos $\hbar\omega \ll E$,

$$\cos\theta \simeq \frac{1}{nv_p} = \frac{v_{\mathrm{luz}}}{v_p}$$

Obsérvese que esta expresión cumple la primera parte del problema, es decir, no existen soluciones para $v_{\mathrm{luz}} > v_p$.

Para el ejemplo dado en el problema

$$T = 5\ \mathrm{GeV} \simeq E = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{140\ \mathrm{meV}}{\sqrt{1 - v^2}} \text{ implica } v = 0{,}9996$$

$$\cos\theta = \frac{c/n}{0{,}9996} = \frac{1}{(1{,}5)\,(0{,}9996)} = 0{,}66693$$

$$\theta = 48°10'$$

Existe un estudio de la radiación Cerenkov, en ondulatoria, en *The Feynman Lectures on Physics,* volumen 1, sección 51.

4.11 (a) En el caso de una partícula que se mueve con una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético,

$$F = m\frac{v^2}{r} = \frac{v}{c}eB \qquad p = mv = \frac{reB}{c}$$

$$p[\text{en meV/}c] = \frac{c}{1\text{ meV}}\frac{reB}{c} = \frac{rB[\text{en gauss-cm}]e[\text{en ues}]\text{erg}}{1\text{ meV}}$$

$$= rB[\text{en gauss-cm}]\,(4{,}803 \times 10^{-10})\,(6{,}242 \times 10^{5})$$

$$p[\text{en meV/}c] = (3{,}00 \times 10^{-4})\,Br[\text{en gauss-cm}]$$

(b) $$p[\text{en meV/}c] = (3{,}00 \times 10^{-4})\,(2{,}1 \times 10^{5}) = 63$$

$$p[\text{en meV/}c] = (3{,}00 \times 10^{-4})\,(7{,}5 \times 10^{4}) = 23$$

(c) No. Como el radio de curvatura no varía, la traza de un positrón que marcha en un sentido tendrá el mismo aspecto que la traza de un electrón moviéndose en sentido contrario. En el experimento de Anderson, la partícula pierde energía al pasar a través de la placa de plomo y como $r \propto p$, sabemos que la partícula se estaba moviendo hacia la parte superior de la página.

(d) $\vec{B}$ señala *hacia* el papel en la figura 26A.

4.12 (a) Las intensidades que se obtienen a partir de polarizaciones ortogonales se suman sin interferir. Así pues, podemos considerar separadamente las polarizaciones ortogonales.

$$I = I_V + I_H = |A_V|^2 + |A_H|^2 \quad \text{o} \quad I = I_{LC} + I_{RC} = |A_{LC}|^2 + |A_{RC}|^2$$

Caso (a)	ausente	ausente	horizontal	ausente

Vertical: $$I_V(r,\theta) = \frac{1}{2}I_0(r,\theta)$$

Horizontal: $$I_H(r,\theta) = 2\,I_0(r,\theta)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta\right)$$

I_H es precisamente el diagrama de doble rendija × (1/2) puesto que la mitad de la intensidad inicial se debe a la componente horizontal de la luz.

$$I = I_0(r,\theta)\left[\frac{1}{2} + 2\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right)\right]$$

Caso (b) ausente horizontal vertical ausente

En este caso no existe interferencia; la intensidad es la suma de las intensidades de dos rendijas aisladas cada una de ellas disminuida en un factor de (1/2) debido al polaroide.

$$I(r,\theta) = I_0(r,\theta)$$

Caso (c) circular horizontal vertical circular

Como la luz que llega a la pantalla procedente de ambas rendijas tiene la misma polarización, existirá una interferencia completa; sin embargo, cada filtro introducido en la trayectoria reduce la intensidad por (1/2).

$$I(r,\theta) = \frac{1}{2} I_0(r,\theta)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right)$$

Caso (d) circular horizontal horizontal circular

Como en el caso (c).

Caso (e) circular horizontal vertical ausente

Este caso es el mismo que el (b), excepto que el primer filtro reduce la intensidad por (1/2).

$$I(r,\theta) = \frac{1}{2} I_0(r,\theta)$$

Capítulo 5

5.1 Consideremos las longitudes de onda que intervienen como una medida grosera del poder de resolución de los microscopios electrónico y óptico.

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{150{,}4 \text{ eV}}{T}}\ \text{Å} = \sqrt{\frac{150{,}4 \text{ eV}}{50 \text{ keV}}}\ \text{Å} = 0{,}055\ \text{Å}$$

$$\lambda_o = 4000\ \text{Å}$$

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} \sim 10^{-5}$$

Un valor más real del poder de resolución de un microscopio electrónico que utiliza electrones de 50 keV, que tiene en cuenta la influencia del ángulo de apertura y la difracción, viene dado por

$$d_e = 2{,}1\ \text{Å}$$

Ver E. Ruska, Fifth International Conference on Electron Microscopy, Philadelphia, 1963.

La magnitud correspondiente en el caso de un microscopio óptico, utilizando luz de 4000 Å, es (ver J. Stone, *Radiation and Optics,* página 182)

$$d_o = \frac{0{,}61\lambda}{\text{A.N.}} = 1700\ \text{Å}$$

A.N. = apertura numérica, que es una propiedad del microscopio y normalmente < 1.4. De aquí que

$$\frac{d_e}{d_o} = \frac{2{,}1\ \text{Å}}{1700\ \text{Å}} \sim 10^{-3}$$

5.2 (a)

$$E = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1{,}38 \times 10^{-16}\ \text{erg/°K})\,(293\text{°K}) = 6{,}07 \times 10^{-14}\ \text{erg}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{M}} = \sqrt{\frac{2(6{,}07 \times 10^{-14}\ \text{erg}}{4(1{,}66 \times 10^{-24}\ \text{gm}}} = 1{,}35 \times 10^{5}\ \text{cm/seg}$$

(b)

$$\lambda = \frac{h}{Mv} = \frac{6{,}63 \times 10^{-27}\ \text{erg-seg}}{4(1{,}66 \times 10^{-24}\ \text{gm})\,(1{,}35 \times 10^{5}\ \text{cm/seg})} = 0{,}740\ \text{Å}$$

A la presión de una atmósfera y a la temperatura ambiente, 1 mol ocupa

$$\frac{293°\text{K}}{273°\text{K}}\,22{,}4\ \text{litros} = 24\ \text{litros} = 2{,}4 \times 10^{4}\ \text{cm}^3$$

Por tanto,

$$\text{espaciado medio} \simeq \left[\frac{2{,}4 \times 10^{4}\ \text{cm}^3}{6 \times 10^{23}}\right]^{1/3} = 34\ \text{Å}$$

$$\frac{\text{longitud de onda de De Broglie}}{\text{espaciado medio}} \simeq \frac{0{,}74\ \text{Å}}{34\ \text{Å}} = 0{,}022$$

(c) Obsérvese que $\lambda \propto E^{-1/2}$, de modo que

$$\lambda = \sqrt{\frac{293}{0{,}01}}\,(0{,}740\ \text{Å}) = 127\ \text{Å}$$

$$\text{densidad} = (0{,}15\ \text{gm/cm}^3)\,\frac{6 \times 10^{23}\ \text{átomos}}{4\ \text{gm}} = 2{,}3 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3$$

$$\text{espaciado medio} \simeq \left[\frac{1}{2{,}3 \times 10^{22}}\right]^{1/3} \text{cm} = 3{,}5\ \text{Å}$$

$$\frac{\text{longitud de onda de De Broglie}}{\text{espaciado medio}} \simeq \frac{127\ \text{Å}}{3{,}5\ \text{Å}} = 36.$$

En este caso son importantes los efectos cuánticos.

5.3 Admitamos que el cobre está a temperatura ambiente.

$$E = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1{,}38 \times 10^{-16}\ \text{erg/°K})\,(293°\text{K}) = 6{,}07 \times 10^{-14}\ \text{erg}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(6{,}07 \times 10^{-14}\ \text{erg})}{9{,}11 \times 10^{-28}\ \text{gm}}} = 1{,}15 \times 10^{7}\ \text{cm/seg}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63 \times 10^{-27}\ \text{erg-seg}}{(9{,}11 \times 10^{-28}\ \text{gm})\,(1{,}15 \times 10^{7}\ \text{cm/seg})} = 63{,}3\ \text{Å}$$

Puede obtenerse más fácilmente este resultado si se ha hecho el problema previo. Utilizando el resultado de la parte (b) de ese problema y el hecho de que $\lambda \propto (mv)^{-1} \propto m^{-1/2}$ para E fijo, se tiene

$$\lambda = \left[\frac{M_{He}}{m} \right]^{1/2} (0{,}740 \text{ Å}) = \left[\frac{4 \text{ uma}}{5{,}49 \times 10^{-4} \text{ uma}} \right]^{1/2} (0{,}740 \text{ Å}) = 63{,}2 \text{ Å}$$

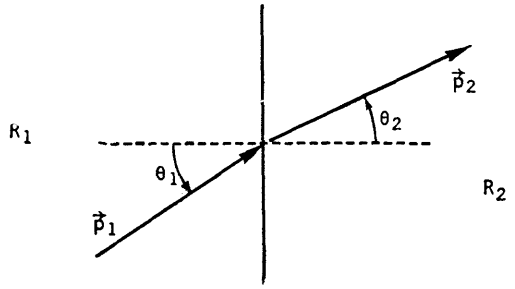
Según el *Handbook of Chemistry and Physics,* el volumen molar del cobre es 7,11 cm^3.

$$\text{espaciado medio} = \left[\frac{7{,}11 \text{ cm}^3}{6{,}02 \times 10^{23}} \right]^{1/3} = 2{,}3 \text{ Å}$$

$$\frac{\text{longitud de onda de De Broglie}}{\text{espaciado medio}} = \frac{63 \text{ Å}}{2{,}3 \text{ Å}} = 27.$$

El modelo del gas de Fermi de electrones libres se estudia en la *Introducción a la Física del Estado Sólido* de C. Kittel, capítulos 7 y 8, Editorial Reverté, S. A.

5.4 (a) El problema puede reducirse a otro bidimensional considerando componentes del impulso en un plano que contiene los vectores impulso inicial y final.



(i) Conservación de la energía: $E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

(ii) Conservación de la cantidad de movimiento: $(\vec{p}_1)_{\parallel} = (\vec{p}_2)_{\parallel}$

Según (i)

$$p_1 = \sqrt{2m(E - V_1)} \qquad p_2 = \sqrt{2m(E - V_2)}$$

Según (ii)

$$p_1 \operatorname{sen} \theta_1 = p_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \sqrt{\frac{E - V_2}{E - V_1}}$$

(b) En mecánica ondulatoria, deben conservarse la frecuencia ω y la componente del vector de la onda paralela a la superficie de separación. Estas condiciones se deducen de la hipótesis plausible de la continuidad de las partículas-ondas en dicha superficie. Dentro de los dieléctricos, extendiendo la relación De Broglie, tenemos

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)}$$

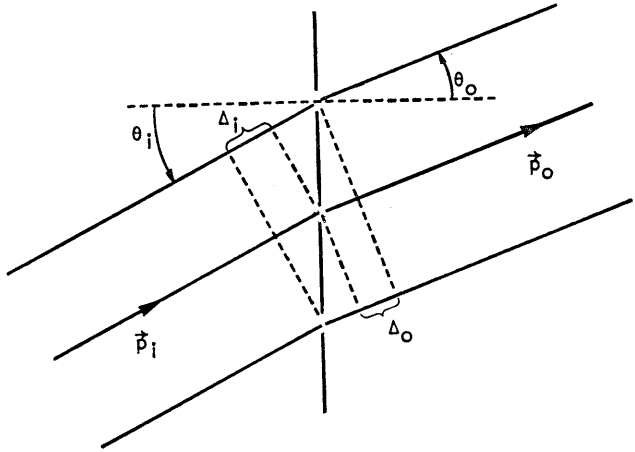
y como la energía se conserva cuando la partícula entra en un dieléctrico, se tiene

$$E = \hbar\omega$$

Por tanto, la solución es completamente análoga a la de la parte (a) y da el mismo resultado.

(c) En mecánica cuántica, vimos que una partícula dada tiene una probabilidad determinada de ser refractada y otra de ser reflejada. El resultado en mecánica clásica para partículas materiales es incorrecto. El resultado "clásico" para la luz es correcto cuando pueden ignorarse los efectos de los fotones individuales. En el caso de muchos fotones, una cierta fracción será reflejada y el resto se refractará.

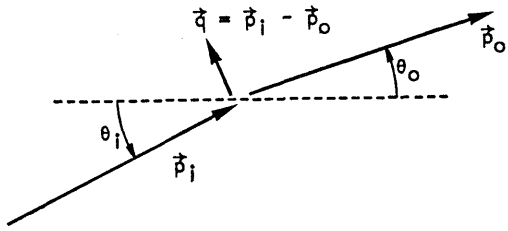
5.5 Obsérvese que en este problema, $\hbar = 1$. La condición para una interferencia es que las longitudes de las trayectorias a través de las diversas rendijas difieran en múltiplos enteros de la longitud de onda.



La diferencia de longitudes para las trayectorias correspondientes a dos rendijas distantes entre sí m posiciones es $m(\Delta_i - \Delta_o)$. De aquí que la dirección de las ondas difractadas esté determinada por $\Delta_i - \Delta_o = n\lambda$, siendo n un número entero; como $\Delta_i = a \operatorname{sen} \theta_i$; y $\Delta_o = a \operatorname{sen} \theta_o$,

$$\operatorname{sen} \theta_o = \operatorname{sen} \theta_i - n \frac{\lambda}{a}$$

En función del impulso



Para la componente vertical (paralela a la red)

$$p_{i_{||}} - p_{o_{||}} = q_{||}$$

$$p_i \operatorname{sen} \theta_i - p_o \operatorname{sen} \theta_o = q_{||}$$

Según la conservación de la cantidad de movimiento, $p_i = p_o$; por tanto,

$$\operatorname{sen} \theta_o = \operatorname{sen} \theta_i - \frac{q_{||}}{p_i}$$

Utilizando la condición anterior, que se deduce por ondulatoria, se obtiene

$$\frac{q_{||}}{p_i} = n \frac{\lambda}{a} = n \frac{2\pi}{a p_i}$$

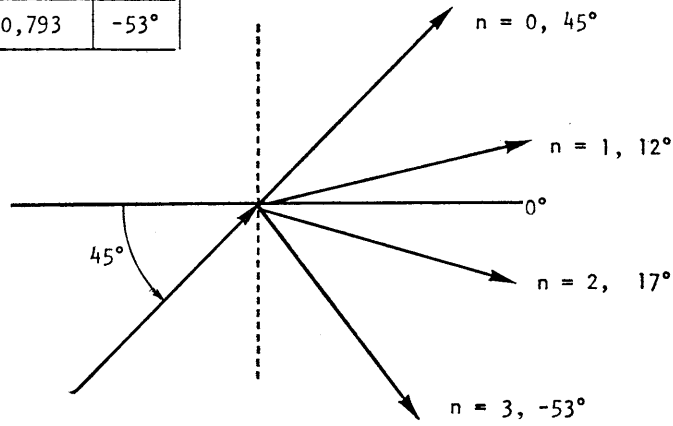
$$q_{||} = \frac{2\pi}{a} n$$

5.6 (a) $a = 2\lambda$ $\theta_i = 45^\circ$ $\text{sen}\ \theta_i = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$

A partir del resultado 5.5

$$\text{sen}\ \theta_o = \text{sen}\ \theta_i - n\frac{\lambda}{a} = 0{,}707 - \frac{n}{2} \qquad \text{siendo } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

n	sen θ_o	θ_o
0	0,707	45°
1	0,207	12°
2	-0,293	-17°
3	-0,793	-53°



(b) La dirección de un haz de luz que pasa a través de una placa de vidrio no varía. La desviación debida a la refracción al entrar la luz en el vidrio está contrarrestada por otra desviación igual y opuesta debida a la refracción cuando la luz sale del vidrio. El dispositivo modificado que se describe en el problema es esencialmente una red con una placa de vidrio a cada lado. Así pues, las direcciones de difracción serán las mismas que las de la parte (a).

5.7 En este problema se aplica la teoría de las redes bidimensionales. Se tiene

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 2{,}9\ \text{Å} \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_o| = [2mE]^{1/2}$$
$$= [2(9{,}11 \times 10^{-28} \text{ gm})(88 \text{ eV})(1{,}60 \times 10^{-12} \text{ erg/eV})]^{1/2}$$
$$= 5{,}06 \times 10^{-19} \text{ gm-cm/seg}$$

En el caso de incidencia normal, $\vec{p}_i \cdot \vec{e}_1 = \vec{p}_i \cdot \vec{e}_2 = 0$; los máximos vienen dados por

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{p}_0 = m_1 h \qquad \vec{e}_2 \cdot \vec{p}_0 = -m_2 h$$

con los valores de m_1 y m_2 restringidos a

$$m_1^2 + m_2^2 < \left(\frac{|\vec{p}_i|\,|\vec{e}_1|}{h} \right)^2$$

$$\frac{|\vec{p}_i|\,|\vec{e}_1|}{h} = \frac{(5{,}06 \times 10^{-19} \text{ gm cm/seg})(2{,}9 \times 10^{-8} \text{ cm})}{6{,}63 \times 10^{-27} \text{ erg seg}} = 2{,}21$$

En la tabla siguiente se indican con una X las combinaciones de m_1 y m_2 permitidas

m_2 \ m_1	0	± 1	± 2
0	X	X	X
± 1	X	X	
± 2	X		

Sea θ_j el ángulo entre $\vec{p}_o$ y $\vec{e}_j$.

$$\cos\theta_j = \frac{\vec{p}_o \cdot \vec{e}_j}{|\vec{p}_o|\,|\vec{e}_j|} = -m_j \frac{h}{|\vec{p}_o|\,|\vec{e}_j|} = -\frac{m_j}{2{,}21}$$

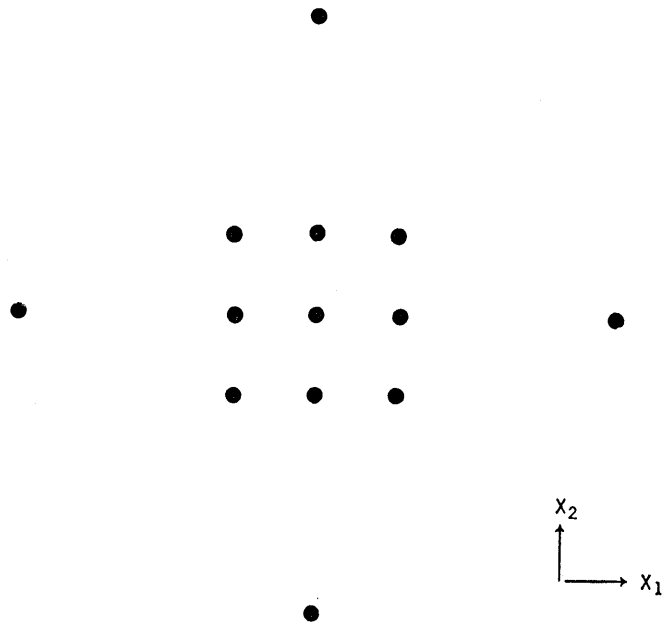
Si la coordenada en la dirección $\vec{e}_j$ en el plano encima del cristal es X_j, se tiene

$$X_j = \frac{5 \text{ cm}}{\tan\theta_j} = 5 \text{ cm} \frac{\cos\theta_j}{\sqrt{1 - \cos^2\theta_j}} = -\frac{(5 \text{ cm}) m_j}{\sqrt{4{,}88 - m_j^2}}$$

m_j	0	± 1	± 2
X_j	0	∓ 2,54 cm	∓ 10,7 cm

Diagrama de difracción

(no dibujado a escala)



5.8 En un experimento tipo Davisson-Germer, la simetría del diagrama de difracción queda determinada por la simetría bidimensional de los átomos en el metal a estudiar. En el metal *A*, los átomos tienen una simetría triple, es decir están situados en los vértices de triángulos equiláteros que cubren la superficie superior. En el metal *B* los átomos están en los vértices de cuadrados, y en el metal *D* en los vértices de exágonos.

Sin embargo, el caso *C* es sospechoso. Es imposible construir una superficie plana mediante pentágonos regulares. El ángulo interior de un pentágono es 108° y por lo tanto el número de pentágonos que se juntarían en un vértice debería ser $360°/108° = 3{,}3$, lo cual es imposible.

5.9 El mecanismo para la difusión de neutrones en el berilio es la difracción en la red cristalina de los átomos. En el proceso de difracción, está cuantizada

la transferencia de impulso y, como se conserva la energía, no se producirá difusión si

$$\text{impulso inicial} < \text{transferencia de impulso}$$

que la satisfacen los neutrones "fríos".

Podemos estimar el umbral de temperaturas para el comienzo de la difusión. El espaciado máximo de la red en el óxido de berilio es $C_o = 4{,}38$ Å. El cuanto mínimo de transferencia de impulso es

$$q = \frac{2\pi\hbar}{c_o} = \frac{\lambda}{c_o} p$$

siendo λ la longitud de onda de De Broglie y p el impulso del neutrón. La temperatura umbral queda determinada por $p = q$, o sea $\lambda = c_o = 4{,}38$ Å, que corresponde a una temperatura

$$T \sim \frac{E}{k} = \frac{1}{k}\frac{1}{2M}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{(1{,}38 \times 10^{-16}\ \text{erg/°K})2(1840)(9{,}11 \times 10^{-28}\ \text{gm})} \times \left(\frac{6{,}63 \times 10^{-27}\ \text{erg-seg}}{4{,}38 \times 10^{-8}\ \text{cm}}\right)^2 = 50°\text{K}$$

La dispersión de los neutrones por el berilio se estudia en *Núcleos y partículas* por E. Segrè (EDITORIAL REVERTÉ, S. A.)

5.10 (a) Poniendo $\vec{x} \to -\vec{x}$ en la ecuación (37e), se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(-\vec{x}, t) - \nabla^2\psi(-\vec{x}, t) = -m^2\psi(-\vec{x}, t)$$

o bien

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_R(\vec{x}, t) - \nabla^2\psi_R(\vec{x}, t) = -m^2\psi_R(\vec{x}, t)$$

Hemos utilizado el hecho de que $\nabla^2 \to \nabla^2$ cuando $\vec{x} \to -\vec{x}$.

También podemos comprobar las propiedades de $\psi_R(\vec{x}, t)$ utilizando la integral de Fourier. Como $\psi(\vec{x}, t)$ es una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir,

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3(\vec{p})\ A(\vec{p})\ \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

en donde $A(\vec{p})$ queda determinado por $\psi(\vec{x}, 0)$.

$$\psi_R(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t) = \int d^3(\vec{p})\ A(\vec{p})\ \exp(-i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

Cambiando variables $\vec{p} \to -\vec{p}$, se tiene

$$\psi_R(\vec{x}, t) = \int d^3(\vec{p})\ A(-\vec{p})\ \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

que es una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon.

(b) En un instante dado, si $|\psi(\vec{x}, t)|$ es grande en las proximidades de $\vec{x} = \vec{x}_0$, entonces $|\psi_R(\vec{x}, t)|$ es grande cerca de $\vec{x} = -\vec{x}_0$. Físicamente, esto significa que si $\psi(\vec{x}, t)$ representa una partícula situada cerca de $\vec{x}_0$, entonces $\psi_R(\vec{x}, t)$ representa una partícula situada cerca de $-\vec{x}_0$, es decir la situación física "simétrica o reflejada" siendo la simetría respecto a $\vec{x} = 0$.

En la extensión en que una trayectoria aproximada se asocia con $\psi(\vec{x}, t)$, la trayectoria simétrica se asocia con $\psi_R(\vec{x}, t)$. La transformación de la función de ondas de ψ a ψ_R se denomina reflexión espacial.

5.11 (a) Poniendo $t \to -t$ en la ecuación (37e) y tomando su complejo conjugado se encuentra

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^*(\vec{x}, -t) - \nabla^2\psi^*(\vec{x}, -t) = -m^2\psi^*(\vec{x}, -t)$$

o bien

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_T(\vec{x}, t) - \nabla^2\psi_T(\vec{x}, t) = -m^2\psi_T(\vec{x}, t)$$

Hemos hecho uso del hecho de que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{cuando} \quad t \to -t$$

También podemos comprobar las propiedades de $\psi_T(\vec{x}, t)$ utilizando la integral de Fourier.

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3(\vec{p})\ A(\vec{p})\ \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

viniendo determinada $A(\vec{p})$ por $\psi(\vec{x}, 0)$.

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t) = \int d^3(\vec{p})\ A^*(\vec{p})\ \exp(-i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

Combinando variables, $\vec{p} \to -\vec{p}$, se tiene

$$\psi_T(\vec{x}, t) = \int d^3(\vec{p})\ A^*(-\vec{p})\ \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p} - i\omega t)$$

que es una solución de frecuencia positiva de la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Como $|\psi_T(\vec{x}, t)| = |\psi^*(\vec{x}, -t)| = |\psi(\vec{x}, -t)$, si $|\psi(\vec{x}, t)|$ es grande en alguna región en un instante t_0, entonces $|\psi_T(\vec{x}, t)|$ es grande en la misma región en un instante $-t_0$. $\psi_T(\vec{x}, t)$ representa el estado físico $\psi(\vec{x}, t)$ invertido en el tiempo respecto a $t = 0$.

En la extensión en que la partícula asociada con $\psi(\vec{x}, t)$ siga una trayectoria, la partícula asociada con $\psi_T(\vec{x}, t)$ sigue la misma trayectoria pero en sentido temporal inverso. La transformación de la función de onda ψ a ψ_T se denomina inversión temporal.

Para una referencia sobre la inversión temporal ver E. P. Wigner, "Über die Operation der Zeitumkerhr in der Quantenmechanik", Gött. Nach, 546-559 (1931).

Capítulo 6

6.1 El razonamiento de este problema contiene una falacia del tipo (a). La afirmación de que la incertidumbre en la dirección de la cantidad de movimiento de un electrón que ha pasado por el segundo orificio debe ser menor o igual que $\Delta\theta = a/d$, viola nuestro conocimiento de que los electrones tienen propiedades ondulatorias. A partir de dicho conocimiento podemos deducir que el impulso probable del electrón que emerge del segundo orificio se extenderá debido a la difracción, en un ángulo $\Delta\theta$, en donde

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{pa}$$

Utilizando este ángulo corregido, se encuentra

$$\Delta x\, \Delta p \sim ap\, \Delta\theta \sim h$$

que es el resultado esperado.

Podría plantearse la objeción de que mientras el electrón estaba entre los orificios, la incertidumbre de sus componentes verticales de posición e impulso debe haber sido limitada por la relación que se establece en el problema. En otro caso, el electrón no podría haber emergido por el segundo orificio. Sin embargo, esta objeción no muestra ninguna violación de la relación de incertidumbre. Lo indicado sobre las componentes verticales de la posición e impulso carece de significado en función de los experimentos que podrían realizarse entre los orificios. Estos experimentos darían resultados consistentes con la relación de incertidumbre.

6.2 (a) La indeterminación en la frecuencia es

$$\Delta\omega \simeq \frac{1}{\Delta t}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad \Delta\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega^2}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\frac{1}{\Delta t}$$

$$= \frac{(6{,}00 \times 10^{-5}\ \text{cm})^2}{2\pi(3{,}00 \times 10^{10}\ \text{cm/seg})\,(10^{-10}\ \text{seg})} = 1{,}91 \times 10^{-10}\ \text{cm} = 0{,}019\ \text{Å}$$

(b) El índice de refracción del disulfuro de carbono líquido es 1,6319 *(Handbook of Chemistry and Physics).*

$$v_g = \frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{d\lambda}{d(1/\lambda)}\frac{d}{d\lambda}v = -\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\frac{c}{n\lambda} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$$

$$= \frac{c}{n}(1 - 0{,}075) = \frac{0{,}925}{1{,}63}c = 0{,}567\,c = 1{,}70 \times 10^{10}\ \text{cm/seg}$$

6.3 (a) El impulso de luz que entra en el prisma está pobremente definido en frecuencia, pero bien definido en el tiempo, es decir, es de corta duración. Por otra parte, el impulso de luz que emerge del prisma está en una dirección determinada, bien definida en frecuencia, pero mal en el tiempo. Esto está de acuerdo con el principio de incertidumbre.

El corto impulso de luz está compuesto por muchas frecuencias (componentes de Fourier) que se suman hasta dar cero en las regiones fuera del impulso. El prisma separa la luz en sus frecuencias componentes. En una banda pequeña de frecuencias algunas de las componentes necesarias para completar la interferencia destructiva en las regiones en que el impulso era cero se han perdido, y por tanto el impulso se esparce en una región más grande.

6.4 El movimiento térmico de los electrones produce una dispersión de la energía, $\Delta E \sim kT$, de los electrones emitidos. A partir de $p = \sqrt{2mE}$, se tiene

$$q = \Delta p = \frac{m\,\Delta E}{\sqrt{2mE}} \qquad \text{o} \qquad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{2}\frac{\Delta E}{E}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{2}\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{2}\frac{kT}{E} = \frac{1}{2}\frac{(8{,}62 \times 10^{-5}\ \text{eV/°K})\,(1273\text{°K})}{10\ \text{eV}} = 0{,}0055$$

6.5 La producción de electrones de 0,01 eV sería un problema técnicamente difícil. El objetivo principal de este ejercicio es resaltar que el movimiento tér-

mico es una consideración importante en esta región de energías. Las superficies emisoras habrían de enfriarse a una temperatura tal que la energía térmica de los electrones sea pequeña comparada con 0,01 eV. La temperatura necesaria será del orden de

$$T \sim \frac{\Delta E}{k} \sim \frac{0{,}001 \text{ eV}}{8{,}62 \times 10^{-5} \text{ eV/°K}} \sim 10\text{°K}$$

Este requisito evidentemente excluye la emisión térmica, pero podría utilizarse la fotoemisión.

6.6 Un fotón que emerge de una red de tamaño finito tiene una indeterminación limitada en su posición vertical y, por tanto, debe tener alguna indeterminación en la componente vertical de su impulso. Según el principio de incertidumbre (con $\hbar = 1$)

$$\Delta q_v \sim \frac{1}{\Delta x_v} = \frac{1}{Na}$$

Según el problema 5.5

$$\operatorname{sen} \theta_0 = \operatorname{sen} \theta_i - \frac{q_v}{p_i}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_0 \pm \Delta\theta) = \operatorname{sen} \theta_i - \frac{q_v}{p_i} \pm \frac{\Delta q_v}{p_i}$$

Para $\Delta\theta \ll 1$, se tiene

$$\Delta\theta \cos \theta_0 = \frac{\Delta q_v}{p_i} = \frac{1}{Nap_i}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{Nap_i \cos \theta_0}$$

6.7 (a) Para determinar completamente el estado de polarización de la luz se necesitan cuatro medidas de intensidad. Las mediciones necesarias y los parámetros de Stokes que caracterizan al estado de polarización de la luz se estudian en *Radiation and Optics* por J. Stone, página 313.

(b) Podemos determinar la polarización haciendo las medidas referidas en (a); sin embargo, debemos modificar el método de hacer las medidas para tener en cuenta la naturaleza no ideal del polaroide.

Determinaremos primero los factores de atenuación del polaroide. Supongamos que se conoce la dirección preferente del polaroide. Teniéndola en posición vertical, las amplitudes para la luz polarizada vertical y horizontalmente cambian en los factores α y β, respectivamente.

$$A_V \rightarrow \alpha A_V \qquad A_H \rightarrow \beta A_H$$

Determinaremos $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ del modo siguiente:

1) Se mide la intensidad de la luz sin el polaroide

$$I_0 = |A_V|^2 + |A_H|^2$$

2) Se miden las intensidades I_{1V} e I_{1H}, que se obtienen cuando está presente un polaroide con su dirección preferente vertical y horizontal, respectivamente. Sea I_1 el valor medio de ambas interunidades.

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_{1V} + I_{1H})$$

$$= \frac{1}{2}[(|\alpha A_V|^2 + |\beta A_H|^2) + (|\beta A_V|^2 + |\alpha A_H|^2)]$$

$$= \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)I_0$$

3) Se miden las intensidades I_{2V} e I_{2H}, que se obtienen cuando se incluyen los dos polaroides, con sus direcciones preferentes vertical y horizontal, respectivamente. Sea I_2 el valor medio de ambas intensidades.

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_{2V} + I_{2H})$$

$$= \frac{1}{2}[(|\alpha^2 A_V|^2 + |\beta^2 A_H|^2) + (|\beta^2 A_V|^2 + |\alpha^2 A_H|^2)]$$

$$= \frac{1}{2}(|\alpha|^4 + |\beta|^4)I_0$$

Despejando en estas ecuaciones $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$, se tiene

$$|\alpha|^2 = \frac{I_1}{I_0} + \sqrt{\frac{I_2}{I_0} - \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2}$$

$$|\beta|^2 = \frac{I_1}{I_0} - \sqrt{\frac{I_2}{I_0} - \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2}$$

Una vez conocidas $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ podemos determinar la intensidad de la luz para cada una de las dos polarizaciones perpendiculares, que por conveniencia llama-

remos vertical y horizontal. Llamemos I_x a la intensidad que se obtendría con un polaroide ideal, e I_x' con el polaroide real, ambos con sus ejes preferentes en la dirección X ($= V$ o H). Entonces

$$I_V' = |\alpha A_V|^2 + |\beta A_H|^2 = |\alpha|^2 I_V + |\beta|^2 I_H$$

$$I_H' = |\beta A_V|^2 + |\alpha A_H|^2 = |\beta|^2 I_V + |\alpha|^2 I_H$$

Fórmulas que pueden invertirse, dando

$$I_V = \frac{|\alpha|^2 I_V' - |\beta|^2 I_H'}{|\alpha|^4 - |\beta|^4}$$

$$I_H = \frac{|\alpha|^2 I_H' - |\beta|^2 I_V'}{|\alpha|^4 - |\beta|^4}$$

De aquí que la medida de I_V' e I_H' determina I_V e I_H, una vez conocida $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$.

6.8 Obsérvese primero que debemos tener en cuenta el hecho de que puede existir una diferencia de fase relativa en la amplitud para la luz que ha pasado a través de combinaciones de filtros diferentes. Por ejemplo, el cambio de amplitud para la luz que pasa a través de la combinación *H, CD, V* difiere en un factor de fase π de la variación de amplitud para la luz que pasa a través de la combinación *H, CL, V*. Pueden obtenerse estas diferencias de fase utilizando la teoría electromagnética clásica o utilizando operadores de proyección cuánticos. Las relaciones necesarias en este problema se resumen en la tabla siguiente

combinaciones de filtros		*diferencia de fase*
CL, H, CD	CL, V, CD	π
CL, H, CD, H	CL, V, CD, H	π
CL, H, CD, H	CL, H, CL, H	0
CL, H, CD, H	CL, V, CL, H	0

Como en el problema 4.12, sumemos las intensidades en D que resultan de las polarizaciones ortogonales.

Caso (a) aus H V aus aus aus

$$I_V = \frac{1}{2}|A_2 B_{21} C_1 + A_2 B_{22} C_2|^2$$

$$I_H = \frac{1}{2}|A_1 B_{11} C_1 + A_1 B_{12} C_2|^2$$

$$I = \frac{1}{2}(|A_2B_{21}C_1 + A_2B_{22}C_2|^2 + |A_1B_{11}C_1 + A_1B_{12}C_2|^2)$$

Se incluye el factor 1/2 porque la mitad de la intensidad incidente se debe a cada estado de polarización.

Caso (b) CL H V aus aus aus

Es el mismo caso que al (a) excepto en que el polarizador circular reduce la intensidad en 1/2.

$$I = \frac{1}{4}(|A_2B_{21}C_1 + A_2B_{22}C_2|^2 + |A_1B_{11}C_1 + A_1B_{12}C_2|^2)$$

Caso (c) CL H V aus aus CD

Aquí sólo existe una intensidad (CD) contribuyendo en D. Existe un factor 1/2 por cada uno de los tres filtros que hay en la trayectoria.

$$I = \frac{1}{8}|A_1(B_{11}C_1 + B_{12}C_2) - A_2(B_{21}C_1 + B_{22}C_2)|^2$$

Caso (d) CL H V CD CL H

Sólo contribuye una intensidad (H). Cuatro filtros a lo largo de la trayectoria darán un factor 1/16.

$$I = \frac{1}{16}|(A_1B_{11} - A_2B_{21})C_1 + (A_1B_{12} + A_2B_{22})C_2|^2$$

Caso (e) aus H aus aus H aus

$$I_V = \frac{1}{2}|A_2B_{21}C_1|^2$$

$$I_H = \frac{1}{2}|(A_1B_{11} + A_2B_{21})C_1 + (A_1B_{12} + A_2B_{22})C_2|^2$$

$$I = \frac{1}{2}(|A_2B_{21}C_1|^2 + |(A_1B_{11} + A_2B_{21})C_1 + (A_1B_{12} + A_2B_{22})C_2|^2$$

6.9 N_i es la tasa de recuento por unidad de tiempo medida estando presente la fuente i. Llamemos A_i el número de sucesos reales que se producen estando presente la fuente i, es decir el número de sucesos por unidad de tiempo que serían detectados por un contador ideal, incluyendo el fondo. En un tiempo T, con la fuente i presente

$$\text{número real de sucesos} = A_iT = N_iT + \text{recuentos perdidos}$$

Los recuentos perdidos se producen en el tiempo muerto que hay en T, que es $N_i T t_0$. Así pues,

$$\text{recuentos perdidos} = A_i N_i T t_0$$

$$A_i T = N_i T(1 + A_i t_0)$$

$$A_i = \frac{N_i}{1 - N_i t_0}$$

Como

$$A_{12} = A_1 + A_2 - A_0$$

tenemos

$$\frac{N_{12}}{1 - N_{12} t_o} = \frac{N_1}{1 - N_1 t_o} + \frac{N_2}{1 - N_2 t_o} - \frac{N_0}{1 - N_0 t_o}$$

Despreciando los términos del orden de $(N_i t_o)^2$, se tiene

$$t_o = \frac{N_1 + N_2 - N_{12} - N_0}{N_{12}^2 - N_1^2 - N_2^2 + N_0^2}$$

Utilizando $N_{12} = N_1 + N_2 - N_0$ en el denominador, queda

$$t_o = \frac{N_1 + N_2 - N_{12} - N_0}{2(N_1 N_2 - N_0 N_{12})}$$

Las pérdidas en el recuento se estudian por L. J. Rainwater y C. S. Wu: "Applications of Probability Theory to Nuclear Particle Detection". *Nucleonics*, volumen 1, número 2, página 60 (1947).

Capítulo 7

7.1 (a) Este problema se resuelve en *Quantum Mechanics* por E. Merzbacher, página 89, y en *Fundamentals of Modern Physics* por R. Eisberg, página 277.

En la región situada a la izquierda de la barrera ($x < a$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = E\,\phi(x)$$

$$\phi(x) = Ae^{ixk} + Be^{-ixk} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

En la región derecha de la barrera ($x > a$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = (E - V_o)\,\phi(x)$$

$$\phi(x) = e^{ixq} \qquad q = \sqrt{\frac{2m(E - V_o)}{\hbar^2}}$$

En la región de la derecha tenemos solamente la solución correspondiente a una partícula que se mueve hacia la derecha. Ajustando las funciones de onda y sus derivadas a la barrera se tiene

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - V_o/E}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - V_o/E}\right)$$

La solución completa es

$$x < a \qquad \phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - V_o/E}\right)\exp\left(ix\sqrt{2mE/\hbar^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{i - V_o/E}\right)\exp\left(-1\sqrt{2mE/\hbar^2}\right)$$

$$x > a \qquad \phi(x) = \exp\left(ix\sqrt{2m(E - V_o)/\hbar^2}\right)$$

El coeficiente de reflexión es

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left[\frac{1 - \sqrt{1 - V_o/E}}{1 + \sqrt{1 - V_o/E}} \right]^2$$

(b)

$$x < a \qquad \phi(x) = e^{-ixk} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$x > a \qquad \phi(x) = A'e^{ixq} + B'e^{-ixq} \qquad q = \sqrt{\frac{2m(E - V_o)}{\hbar^2}}$$

Ajustando las funciones de su onda y sus derivadas en la barrera se tiene

$$A' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - V_o/E}} \right) \qquad B' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - V_o/E}} \right)$$

La solución completa es

$$x < a \qquad \phi(x) = \exp\left(- ix \sqrt{2mE/\hbar^2} \right)$$

$$x > a \qquad \phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - V_o/E}} \right) \exp\left(ix \sqrt{2m(E - V_o)/\hbar^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - V_o/E}} \right) \exp\left(- ix \sqrt{2m(E - V_o)/\hbar^2} \right)$$

El coeficiente de reflexión es

$$R' = \left| \frac{A'}{B'} \right|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_o/E}}{1 + \sqrt{1 - V_o/E}} \right)^2 = R$$

El coeficiente de transmisión es

$$T' = 1 - R' = \frac{4\sqrt{1 - V_o/E}}{(1 + \sqrt{1 - V_o/E})^2}$$

7.2 Este problema está resuelto en *Quantum Mechanics* por E. Merzbacher, página 91, y en *Fundamentals of Modern Physics* por R. Eisberg, página 231.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger son:

Región I $\qquad \phi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Región II $\phi(x) = Be^{-xq} + Ce^{xq}$ $q = \sqrt{\frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2}}$

Región III $\phi(x) = De^{ixk}$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Ajustando las soluciones y sus derivadas, se tiene

en $x = 0$

$$1 + A = B + C$$

$$ik(1 - A) = q(C - B)$$

en $x = a$

$$Be^{-aq} + Ce^{aq} = De^{iak}$$

$$q(Ce^{aq} - Be^{-aq}) = ikDe^{iak}$$

Después de algunos cálculos resulta

$$A = \left(\frac{1 - ir}{1 + ir}\right) \frac{e^{aq} - e^{-aq}}{e^{aq} - \left(\frac{1 - ir}{1 + ir}\right)^2 e^{-aq}}$$

siendo $r = \frac{q}{k} = \sqrt{V_o/E - 1}$

El coeficiente de reflexión es

$$R = |A|^2 = \frac{(e^{aq} - e^{-aq})^2}{(e^{aq} - e^{-aq})^2 + \left(\frac{4r}{1 + r^2}\right)^2}$$

El coeficiente de transmisión es

$$T = 1 - R = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + r^2}{4r}\right)^2 (e^{aq} - e^{-aq})^2}$$

En el caso de una barrera "alta y gruesa" $aq \gg 1$.

$$\ln T = -\ln\left\{1 + \left(\frac{1 + r^2}{4r}\right)^2 (e^{aq} - e^{-aq})^2\right\}$$

$$\sim -\ln\left\{\left(\frac{1 + r^2}{4r}\right)^2 e^{2aq}\right\} = -2aq - 2\ln\left(\frac{1 + r^2}{4r}\right) \sim -2aq$$

Resultado que ha de compararse con la ecuación (33b).

$$T \sim \exp\left(-2a\sqrt{2m(V_o - E)/\hbar^2}\right) = \exp(-2aq)$$

o sea

$$\ln T \sim -2aq$$

7.3 En el vidrio, un fotón tiene energía $E = \hbar\omega$, y número de onda $k = 2\pi n\lambda$, siendo λ la longitud de onda en el aire. Al cruzar la superficie se conserva la componente del número de onda paralela a la misma. Esto es necesario con objeto de que las ondas luminosas (campo eléctrico) tengan el mismo período espacial en ambos lados de la superficie. La magnitud que se conserva es

$$k_{||} = k \operatorname{sen} 45° = \frac{2\pi n}{\lambda} \operatorname{sen} 45° = \frac{1{,}75}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{\lambda}$$

La frecuencia y la energía se conservan también al cruzar la superficie.

En el aire, un fotón tiene energía E y un número de onda κ.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \hbar c\kappa = \hbar c \sqrt{\kappa_\perp^2 + \kappa_{||}^2} \qquad \text{en donde} \quad \kappa_{||} = k_{||}$$

$$\kappa_\perp = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \kappa_{||}^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1{,}75}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm i\left(\frac{4{,}58}{\lambda}\right)$$

De aquí que

$$T \sim \exp(-2aq) = \exp(-2a|\kappa_\perp|) =$$

$$= \exp\left\{-9{,}16\frac{a}{\lambda}\right\} = \exp\left\{-9{,}16\frac{0{,}01 \text{ mm}}{6000 \text{ Å}}\right\} = \exp(-153) = 4 \times 10^{-67}$$

7.4 En el medio denso a la izquierda no existe un rayo bien definido en el sentido de la óptica geométrica. De aquí que la posición de la línea que representa el rayo transmitido no es significativa a este respecto. Sin embargo, la dirección de la línea sirve para indicar la dirección del vector de onda de la luz transmitida.

7.5 Para valores de x grandes negativos

$$\phi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk}$$

$$F_n(x) = \phi^*(x)\frac{d\phi(x)}{dx} - \phi(x)\frac{d\phi^*(x)}{dx} = 2ik(1 - |A|^2)$$

Para valores de x grandes positivos

$$\phi(x) = Be^{ixk}$$

$$F_p(x) = \phi^*(x)\frac{d\phi(x)}{dx} - \phi(x)\frac{d\phi^*(x)}{dx} = 2ik|B|^2$$

Para todo x

$$\frac{dF(x)}{dx} = \phi^*(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \phi(x)\frac{d^2\phi^*(x)}{dx^2}$$

$$= \phi^*(x)\left\{-\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\phi(x)\right\} - \phi(x)\left\{-\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\phi^*(x)\right\} = 0$$

De aquí que

$$F(x) = \text{constante}$$

o bien

$$F_n(x) = F_p(x)$$

y así

$$|A|^2 + |B|^2 = 1$$

7.6 Utilicemos la solución del problema 7.5.

Para valores de x grandes negativos

$$\phi(x) = e^{ixk} + Ae^{-ixk}$$

Para valores de x grandes positivos

$$\phi(x) = Be^{ixk}$$

El coeficiente de transmisión de izquierda a derecha es

$$T_{ID} = |B|^2$$

Para calcular el coeficiente de transmisión de derecha a izquierda formemos una combinación ideal "adecuada" de $\phi^*(x)$ y $\phi(x)$ que, en el caso de x negativo grande, represente una partícula moviéndose hacia la izquierda.

$$\psi(x) = \phi^*(x) + C\phi(x)$$

Para valores de x grandes y negativos

$$\psi(x) = (1 + CA)e^{-ixk} + (A^* + C)e^{ixk}$$

en donde queremos que

$$A^* + C = 0$$

De aquí que la solución sea

$$\psi(x) = \phi^*(x) - A^*\phi(x)$$

Para valores de x grandes y negativos

$$\psi(x) = (1 - |A|^2)e^{-ixk}$$

Para valores de x grandes y positivos

$$\psi(x) = B^*e^{-ixk} - A^*Be^{ixk}$$

El coeficiente de transmisión de derecha a izquierda es

$$T_{DI} = \left|\frac{1 - |A|^2}{B^*}\right|^2 = |B|^2$$

en donde hemos utilizado el resultado obtenido en el problema 7.5 de que $1 - |A|^2 = |B|^2$. Por tanto,

$$T_{ID} = T_{DI}$$

7.7 Intentemos estimar el período de un núcleo que sufre desintegración beta suponiendo que existe una penetración de barrera semejante a la que interviene en la desintegración alfa. Puede modificarse la teoría de las secciones 7.38-7.42 para aplicarla a la desintegración beta. Como las energías de desintegración β^+ son normalmente del orden de 1 MeV, deberá utilizarse mejor una teoría relativista; sin embargo, para obtener sólo un orden de magnitud podemos utilizar la teoría no relativista de Schrödinger. El cambio más importante procede de cambiar m_α por m_e

$$\text{Log } T_\beta \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_\alpha}}\,\text{Log } T_\alpha \sim 10^{-2}\,\text{Log } T_\alpha \sim -1$$

Estimemos el valor de τ_o, en la ecuación (42a), utilizando $v = c$ para el positrón

$$\tau_o = \frac{2R}{v} \simeq \frac{2(7{,}3 \times 10^{-13}\text{ cm})}{3{,}0 \times 10^{10}\text{ cm/seg}} \simeq 5 \times 10^{-23}\text{ seg}$$

De aquí que

$$\text{Log } \tau = \text{Log } \tau_o - \text{Log } T \sim -22{,}3 + 1 \sim -21$$

$$\tau \sim 10^{-21}\text{ seg}$$

Este número es demasiado pequeño, ya que τ para el caso de desintegraciones β^+ es del orden de minutos a horas.

7.8 En las desintegraciones β, un neutrino y el electrón se distribuyen la energía de desintegración (ver figura 36B en la página 277). En las medidas calorimétricas se pierde la energía del neutrino, porque la materia es casi transparente a los neutrinos. La existencia de los neutrinos se postuló para explicar la "pérdida" de energía en las desintegraciones β. Ver *Núcleos y partículas* de Segrè, página 379.

7.9 (a) A partir de la uniformidad del cociente entre U^{235} y U^{238} que se encuentra naturalmente, se puede sacar la conclusión de que la materia en el sistema solar se formó mediante un proceso uniforme o al menos mediante procesos semejantes dentro de algún período de tiempo relativamente corto.

(b)

$$\frac{N(U^{235})}{N(U^{238})} = \frac{e^{-\lambda_{235}t}}{e^{-\lambda_{238}t}} = \frac{0{,}71}{99{,}28} = 0{,}00715$$

$$\ln(0{,}00715) = t\left(\frac{\ln 2}{T_{238}} - \frac{\ln 2}{T_{235}}\right)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}00715)}{\ln 2}\,\frac{T_{238}\,T_{235}}{T_{235} - T_{238}} =$$

$$= -\frac{4{,}94}{0{,}693}\,\frac{(4{,}50 \times 10^9 \text{ años})\,(7{,}1 \times 10^8 \text{ años})}{(0{,}71 \times 10^9 \text{ años}) - (4{,}50 \times 10^9 \text{ años})} = 6{,}0 \times 10^9 \text{ años}$$

7.10 (a) Refirámonos a la cadena uranio-radio-plomo que aparece en la página 340 del texto. Supongamos que la muestra es lo bastante antigua como para haber alcanzado una distribución de equilibrio entre los sucesivos productos de desintegración. En el equilibrio, los productos se presentan en cantidades tales que el número total de desintegración por minuto de cada producto es el mismo.

$$\lambda_i N_i = \lambda_j N_j$$

en donde i y j se refieren a dos productos cualesquiera. En particular,

$$N(Ra) = \frac{\lambda(U)}{\lambda(Ra)}\,N(U) = \frac{T(Ra)}{T(U)}\,N(U)$$

$$N_i \propto \frac{W_i}{A_i}$$

donde W_i es el peso de la muestra y A_i es el peso atómico del elemento de la muestra. De donde

$$W(Ra) = \frac{T(Ra)}{T(U)} \frac{A(Ra)}{A(U)} W(U)$$

$$W(Ra) = \frac{1662 \text{ años}}{4{,}5 \times 10^9 \text{ años}} \frac{226}{238} (1 \text{ ton}) = 3{,}4 \times 10^{-7} \text{ ton} = 0{,}34 \text{ gm}$$

El equilibrio se alcanza en 1 millón de años aproximadamente, después que la distribución quede esencialmente fija.

(b) Mediante la ecuación (47a)

$$N(Pb) = N(U)e^{\lambda T}(1 - e^{-\lambda T}) = N(U)(e^{\lambda T} - 1)$$

$$\lambda T = \frac{T \ln 2}{T_U} = \frac{\ln 2}{4{,}5 \times 10^9 \text{ año}} (5 \times 10^8 \text{ año}) = 0{,}077$$

$$N(Pb) = 1 \text{ ton}(e^{0{,}077} - 1) \simeq (1 \text{ ton})(1 + 0{,}077 - 1) = 0{,}077 \text{ ton} = 77 \text{ kg}$$

Capítulo 8

8.1 La función de onda es

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{17}(x, t) + \psi_{18}(x, t)]$$

Esto da

$$P(x, t) = \frac{1}{a} \{ \text{sen}^2(17\pi y) + \text{sen}^2(18\pi y) + 2\,\text{sen}(17\pi y) \times \text{sen}(18\pi y) \cos(2\pi t/t_o) \}$$

en donde $y = x/a$ y $t_o = (4ma^2)/(35\pi\hbar)$.

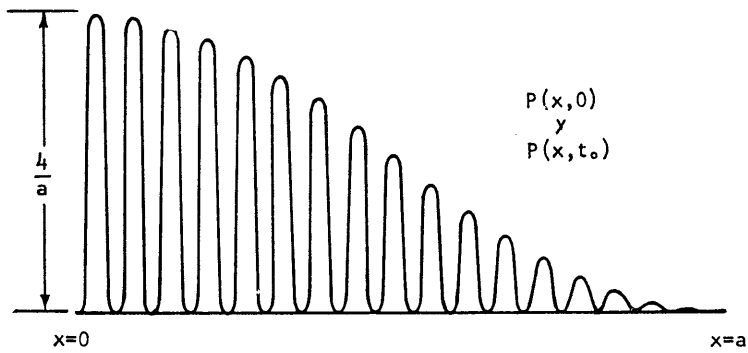
$$P(x, 0) = \frac{1}{a} \{ [\text{sen}(17\pi y) + \text{sen}(18\pi y)]^2 \} = \frac{4}{a} \text{sen}^2 \left(\frac{35}{2} \pi y \right) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \pi y \right)$$

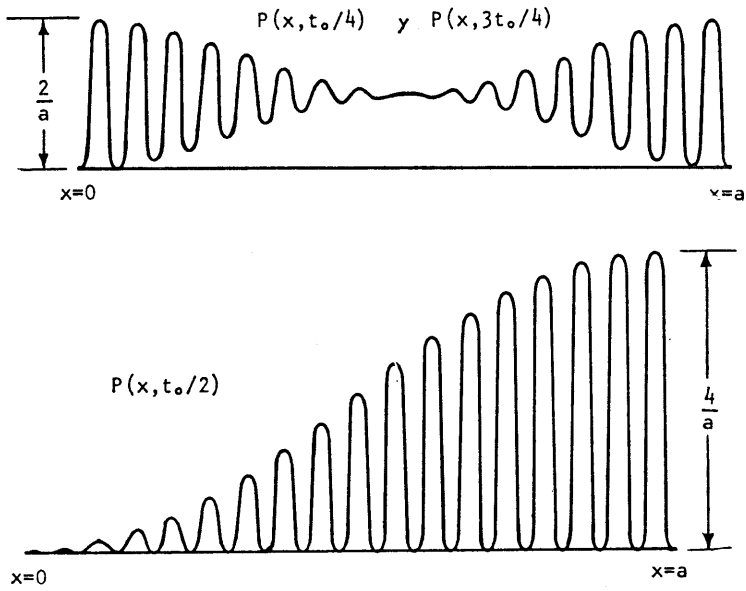
$$P(x, t_o/4) = \frac{1}{a} \{ \text{sen}^2(17\pi y) + \text{sen}^2(18\pi y) \} = \frac{1}{a} \{ 1 - \cos(35\pi y) \cos(\pi y) \}$$

$$P(x, t_o/2) = \frac{1}{a} \{ [\text{sen}(17\pi y) - \text{sen}(18\pi y)]^2 \} = \frac{4}{a} \text{sen}^2 \left(\frac{1}{2} \pi y \right) \cos^2 \left(\frac{35}{2} \pi y \right)$$

$$P(x, 3t_o/4) = P(x, t_o/4)$$

$$P(x, t_o) = P(x, 0)$$





(b) En el caso de una partícula clásica con energía E_c, en donde

$$E_c = \frac{1}{2}(E_{17} + E_{18}) = (17^2 + 18^2)\frac{\pi^2}{4m}\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2 = 1226\,\frac{\pi^2}{8m}\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2$$

el período clásico es

$$t_c = \frac{2a}{v}$$

$$\frac{t_c}{t_0} = \frac{\dfrac{2a}{v}}{\dfrac{4ma^2}{35\pi\hbar}} = \sqrt{\frac{2m}{E_c}}\,\frac{35\pi\hbar}{4ma} = \sqrt{\frac{1225}{1226}} = 0{,}9996$$

(c) El período del movimiento mecánico cuántico viene dado por

$$\frac{t_0(E_{n+1} - E_n)}{\hbar} = 2\pi$$

que da

$$t_0 = \frac{2ma^2}{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\hbar}$$

En el caso del movimiento clásico se tiene

$$t_c = \sqrt{\frac{2ma^2}{E}}$$

$$E_n \leqslant E \leqslant E_{n+1} \text{ implica } \sqrt{\frac{2ma^2}{E_{n+1}}} \leqslant t_c \leqslant \sqrt{\frac{2ma^2}{E_n}}$$

o sea

$$\frac{2ma^2}{(n+1)\pi\hbar} \leqslant t_c \leqslant \frac{2ma^2}{n\pi\hbar}$$

En el límite $n \to \infty$

$$t_c = t_0 = \frac{2ma^2}{n\pi\hbar}$$

8.2 Si se tuviese que "promediar respecto a los movimientos clásicos" se perderían los efectos debido a las interferencias. Así pues, es de sospechar que el esquema propuesto sólo funcionaría bien en el límite de longitudes de onda cortas (clásico) pero que fallaría por completo cuando fuesen importantes los efectos debidos a las interferencias.

Un ejemplo sencillo en el que falla el método es el de una partícula en un pozo de potencial profundo. La mecánica cuántica predice aproximadamente una distribución de probabilidad $P(x) = C \operatorname{sen}^2(\pi x/a)$ en el estado fundamental, mientras que el método basado en el promedio da $P(x) =$ constante.

Otro ejemplo es el de los procesos de difracción de los electrones. La mecánica cuántica da un diagrama de interferencias de la distribución de electrones difundidos, mientras que no ocurre así cuando se promedian muchas dispersiones clásicas.

8.3 Si se amplían a $\pm \infty$, los límites de la integral (22a), la expresión resultante

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2$$

es precisamente la probabilidad de encontrar la partícula en un punto cualquiera en el instante t. Esta probabilidad es independiente del tiempo. Como sabemos que la partícula está "en el pozo" en el instante $t = 0$,

$$Q(t) = Q(0) = P(0)$$

Obsérvese que esta discusión es válida en el caso de una partícula cuya energía se extiende en un pequeño intervalo de valores alrededor de E_4. Si la partícula tiene exactamente una energía E_4, la integral diverge cuando los límites pasan a ser $\pm \infty$, puesto que la partícula no está realmente en un estado ligado.

En las secciones 7.49-7.51 del texto se discute la normalización de la función de onda.

8.4 Este problema está resuelto en *Quantum Mechanics* de L. Schiff, página 83.

Resolvamos la ecuación de Schrödinger en el caso de una partícula en el pozo.

$$0 < x < a \qquad \phi(x) = A \operatorname{sen} kx \qquad k = \sqrt{2m(B - |E|)/\hbar^2}$$

$$a < x < \infty \qquad \phi(x) = Ce^{-xa} \qquad q = \sqrt{2m|E|/\hbar^2}$$

Ajustando las funciones de onda y sus derivados en $x = a$ se tiene

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k}{q}$$

Poniendo $x = ka$ en la ecuación anterior, tendremos

$$\operatorname{tg} x = -\frac{x}{\sqrt{2G - x^2}} \qquad \text{en donde} \qquad G = \frac{a^2Bm}{\hbar^2}$$

Examinando un gráfico aproximado de tg x, y $-x/\sqrt{2G - x^2}$ puede verse que se obtiene una solución (no nula) precisamente cuando $\sqrt{2G} = \pi/2$. De aquí que

$$G_o = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}234$$

Las condiciones (a), (b) y (c) conducen todas a un gran valor de G; por tanto, contribuyen a satisfacer que $G > G_o$. Para cualquier pozo que tenga un estado ligado, aproximadamente la mitad de la longitud de onda de De Broglie de la partícula debe ajustar dentro del pozo, sin que la energía de la partícula sea mayor que la parte superior del pozo. Todas las condiciones (a), (b) y (c) contribuyen a que esto sea posible:

a) Una masa grande corresponde a una longitud de onda corta.

b) En el caso de un pozo profundo, el impulso de la partícula puede ser grande, lo que originará una longitud de onda corta.

c) Si el pozo es ancho, puede ajustarse en su interior una semilongitud de onda larga.

8.5 Utilicemos los resultados obtenidos en el problema anterior.

$$a = 1{,}85 \times 10^{-13} \text{ cm} = \frac{1{,}85 \times 10^{-13} \text{ cm}}{3{,}86 \times 10^{-11} \text{ cm}} \frac{\hbar}{m_e c} = 4{,}79 \times 10^{-3} \frac{\hbar}{m_e c}$$

$$m = \frac{1}{2} M_p = 918 m_e$$

$$G = \frac{a^2 B m}{\hbar^2} = \frac{(4{,}79 \times 10^{-3})^2 (41{,}6 \text{ MeV})\,(918)}{m_e c^2}$$

$$= \frac{0{,}876 \text{ MeV}}{0{,}511 \text{ MeV}} = 1{,}71 \qquad > G_0 = 1{,}234$$

Necesitamos despejar x en

$$\text{tg } x = -\frac{x}{\sqrt{2G - x^2}}$$

o bien

$$x = \sqrt{2G} \operatorname{sen} x = 1{,}85 \operatorname{sen} x$$

en donde $x = ka = a\sqrt{2m(B - |E|)/\hbar^2}$. Esta ecuación puede resolverse gráficamente con facilidad. La solución es

$$x = 1{,}80$$

Despejando $|E|$ en

$$x^2 = k^2 a^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2}(B - |E|) = 2G\left(1 - \frac{|E|}{B}\right)$$

se encuentra

$$|E| = B\left(1 - \frac{x^2}{2G}\right) = B \cos^2 x$$

$$|E| = (41{,}6 \text{ meV})\,(\cos^2 1{,}80) = (41{,}6 \text{ meV})\,(0{,}0516) = 2{,}15 \text{ MeV}$$

8.6 En el cloro que se encuentra en la naturaleza se encuentran presentes dos isótopos: Cl^{35} con una abundancia del 75,53 % y el Cl^{37} con una abundancia del 24,47 %. Las moléculas de HCl formadas con los dos tipos diferentes de cloro emitirán rayas del espectro de vibración ligeramente diferentes, con una intensidad proporcional a la abundancia del tipo de cloro en cuestión.

Según la ecuación (37a)

$$\frac{\omega_v'}{\omega_v''} = \sqrt{\frac{M_1''M_2''(M_1' + M_2')}{M_1'M_2'(M_1'' + M_2'')}}$$

hidrógeno: $M_1' = M_1'' = 1$ uma

cloro: $M_2' = 35$ uma $\quad M_2'' = 37$ uma

$$\frac{\omega_v'}{\omega_v''} = \sqrt{\frac{37}{35}\frac{36}{38}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{35}\right)\left(1 - \frac{1}{38}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2}{35 \times 38}} \simeq 1 + \frac{1}{35 \times 38}$$

$$\omega_v' - \omega_v'' = \frac{1}{35 \times 38}\omega_v''$$

$$\tilde{\nu}_v' - \tilde{\nu}_v'' = \frac{1}{35 \times 38}\tilde{\nu}_v'' = \frac{5600}{35 \times 38}\ \text{cm}^{-1} = 4{,}2\ \text{cm}^{-1}$$

8.7 (a) Según la sección 8.40 del texto

$$\omega_r \sim \frac{\hbar}{2Ma_o^2} = \frac{\hbar}{2a_o^2}\frac{M_1 + M_2}{M_1M_2}$$

Por tanto

$$\frac{\omega_r'}{\omega_r''} = \frac{M_1''M_2''(M_1' + M_2')}{M_1'M_2'(M_1'' + M_2'')}$$

yodo: $M_1' = M_1'' = 127$

cloro: $M_2' = 35 \qquad M_2'' = 37$

$$\frac{\omega_r'}{\omega_r''} = \frac{37}{35}\frac{162}{164}$$

$$\frac{\tilde{\nu}_r''}{\tilde{\nu}_r'} = \frac{35}{37}\frac{164}{162} = \left(1 - \frac{2}{37}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right) = 1 - \frac{127}{37 \times 81} = 1 - 0{,}04238$$

$$\tilde{\nu}_r'' = \tilde{\nu}_r' - 0{,}04238\tilde{\nu}_r'$$

			previsto	medido
columna 1	$\tilde{\nu}_r'' =$	6980 Mc $-$ 0,04238 $\times$ 6980 Mc $=$	6684 Mc	6684 Mc
columna 2	$\tilde{\nu}_r'' =$	27.336 Mc $-$ 0,04238 $\times$ 27.336 Mc $=$	26.178 Mc	26.181 Mc

(b) Intensidad fila superior: intensidad fila inferior $\sim 3 : 1$ (ver problema 8.6).
(c) $k = 1$ (ver parte (a)).

8.8 Para hacer una estimación del orden de magnitud de las frecuencias de resonancia en un cristal, utilizaremos un modelo monodimensional en el que se supone compuesto el cristal por un rosario de masas y muelles dispuestos alternativamente. Las vibraciones corresponden a desplazamientos longitudinales de las masas.

La frecuencia más elevada se presenta en el modo en el que dos masas adyacentes oscilan alejándose y acercándose una a la otra, mientras que el punto medio de los muelles permanece estacionario. En el caso de una masa aislada, las oscilaciones de este modo son equivalentes a las oscilaciones con un solo muelle de constante $4K$, siendo K la constante de los muelles que unen dos masas consecutivas. Por tanto, la frecuencia de resonancia más elevada es

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{4K}{M}}$$

$$K = \text{constante del muelle} \sim \frac{\alpha^2 mc^2}{a_o^2} = \frac{\alpha^4 m}{\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^2}$$

$$M = \text{masa atómica} \sim AM_p = \frac{A}{\beta} m$$

$$\omega_{max} \sim 2\sqrt{\frac{\beta}{A}} \frac{\alpha^2}{\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)}$$

La frecuencia de resonancia más baja se produce en el modo en que los extremos del cristal oscilan acercándose y alejándose entre sí. Para estimar su valor, admitamos que la velocidad del sonido en el cristal depende débilmente de la frecuencia. Entonces se tiene

$$\omega_{\min} = 2\pi \frac{v}{\lambda_{\min}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} 2\pi \frac{v}{\lambda_{\max}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \omega_{\max}$$

siendo v la velocidad del sonido en el cristal. Si su longitud es L y el espacio de la red es a:

$$\lambda_{\max} = 2a = 2\frac{L}{N}$$

$$\lambda_{\min} = 2L$$

Así pues,

$$\omega_{\min} = \frac{1}{N}\,\omega_{\max} \sim \frac{2}{N}\sqrt{\frac{\beta}{A}}\,\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)}$$

Puede obtenerse un resultado más preciso para $\omega_{\min}$, sin la hipótesis hecha acerca de la velocidad del sonido, utilizando la relación de dispersión para el caso de un rosario de masas y muelles. Esta relación se deduce en *Ondas,* volumen III de Berkeley Physics Course (Editorial Reverté, S. A.), páginas 85-86.

Utilicemos el cobre como ejemplo.

$$2\sqrt{\frac{\beta}{A}}\,\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{(1836)\,(63{,}5)}}\,\frac{(1/137)^2(3{,}00 \times 10^{10}\ \text{cm/seg})}{3{,}86 \times 10^{-11}\ \text{cm}}$$

$$= 2{,}43 \times 10^{14}\ \text{seg}^{-1}$$

En el caso de un cristal de 1 mm de largo

$$\frac{1}{N} = \frac{a_o}{1\ \text{mm}} = 5{,}29 \times 10^{-8}$$

$$\omega_{\min} = (2{,}43 \times 10^{14}\ \text{seg}^{-1})\,(5{,}29 \times 10^{-8}) = 12{,}9\ \text{Mc}$$

$$\omega_{\max} = 2{,}43 \times 10^{8}\ \text{Mc}$$

8.9 Utilizando el valor aproximado de ω obtenido en el problema 8.8, se tiene

$$v \simeq \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\,a_o\sqrt{\frac{\beta}{A}}\,\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{A}}\,\alpha c$$

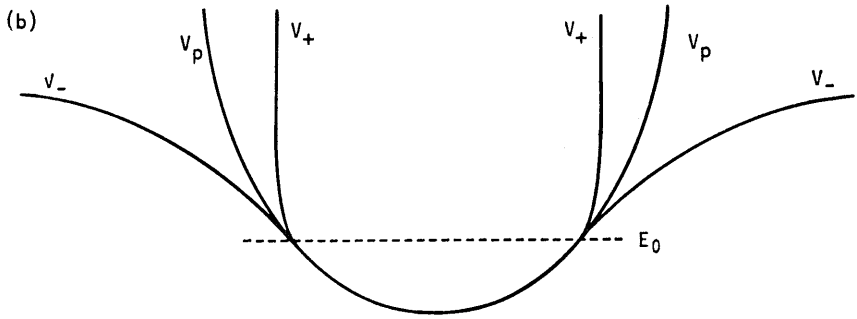
$$\frac{v}{c} \simeq \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{A}}\,\alpha$$

En el cobre

$$\frac{v}{c} \simeq \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{(1836)\,(63{,}5)}}\,\frac{1}{137} = 1{,}36 \times 10^{-5}$$

$$v \simeq (1{,}36 \times 10^{-5})\,(3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/seg}) = 4080\ \text{m/seg}$$

8.10 (a) Ver parte (b).



V_p es la parábola.

Utilicemos la aproximación *WKB* como se describe en el rótulo de la figura 23A. En esta aproximación, las energías de estados ligados por debajo de E_0 son iguales para los tres potenciales $E_{n+1} - E_n$ = constante. En el caso de energías más elevadas, los valores relativos de $E_{n+1} - E_n$ para potenciales diferentes dependen de la rapidez de crecimiento de la distancia entre los puntos clásicos de giro en función de E en cada caso. Si la distancia crece rápidamente, entonces $E_{n+1} - E_n$ será pequeña, porque en el caso de un pequeño aumento de energía se ajustará una semilongitud de onda adicional entre los puntos clásicos de giro. Si la distancia aumenta lentamente, entonces será grande $E_{n+1} - E_n$. Así pues, en el caso de energías próximas a E_0, $E_{n+1} - E_n$ cuando n aumenta se comporta así:

$$E_{n+1} - E_n \begin{cases} \text{aumenta en el caso } V_+ \\ \text{constante para } V_p \\ \text{disminuye en el caso } V_- \end{cases}$$

8.11 Al comparar los átomos de helio neutro y de litio ionizado con una carga, existe una interacción electrón-núcleo que difiere del valor en un factor de 2/3 y una interacción entre los dos electrones que quedan que es la misma en ambos átomos. La fuerza relativa de la interacción electrón-electrón y de la interacción electrón-núcleo es diferente en ambos átomos, de modo que no se debe esperar un simple cambio de escalas en sus espectros. Sin embargo, son semejantes cualitativamente.

8.12 Según la sección 3.48, ecuación (48d)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega\alpha \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2$$

$$\omega \propto E_n - E_m \propto \mu Z^2 \qquad a \propto \frac{1}{\mu Z}$$

De aquí que

$$\tau \propto \frac{1}{\mu Z^4}$$

$$\tau_{He} = \frac{1}{2^4} \tau_H = \frac{0{,}16 \times 10^{-8} \text{ seg}}{16} = 10^{-10} \text{ seg}$$

8.13 En el hidrógeno, $\mu \simeq m$, $Z = 1$. En el aluminio muónico, $\mu \simeq m_\mu \simeq 207m$, $Z = 13$.

$$\tau_{Al} = \frac{1}{(207)\,(13^4)} \tau_H = \frac{0{,}16 \times 10^{-8} \text{ seg}}{5{,}91 \times 10^6} = 2{,}7 \times 10^{-16} \text{ seg}$$

8.14 Según la ecuación (46c)

$$E_n = -\left(\frac{\mu}{m} \right) Z^2 R_\infty \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

En el aluminio muónico, $\mu \simeq m_\mu \simeq 207m$, $Z = 13$.

$$\tilde{\nu} = \frac{E_3 - E_2}{hc} = -(207)\,(13^2)\tilde{R}_\infty \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) =$$

$$= 4{,}86 \times 10^3 \, \tilde{R}_\infty = 5{,}33 \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda = 0{,}188 \text{ Å}$$

8.15 El radio de Bohr del hidrógeno es

$$a_o = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Puede generalizarse la expresión para un Z arbitrario y una masa arbitraria haciendo la sustitución

$$e^2 \to Ze^2 \qquad \text{y} \qquad m \to \mu = \text{masa reducida}$$

De aquí que

$$a_o' = \frac{\hbar^2}{\mu Z e^2} = \frac{m}{\mu Z} a_o$$

(a) Para el aluminio, $\mu = 207m$, $Z = 13$, $A = 27$.

$$a_o' = \frac{m}{\mu Z} a_o = \frac{1}{(207)(13)} (5{,}3 \times 10^{-9} \text{ cm}) = 2{,}0 \times 10^{-12} \text{ cm}$$

$$\text{radio nuclear} = r = r_o A^{1/3}$$

$$= (1{,}2 \times 10^{-13} \text{ cm})(27)^{1/3} = 3{,}6 \times 10^{13} \text{ cm}$$

$$\frac{a_o'}{r} = \frac{2{,}0 \times 10^{-12} \text{ cm}}{3{,}6 \times 10^{-13} \text{ cm}} = 5{,}6$$

(b) Para el plomo, $\mu = 207m$, $Z = 82$, $A = 207$.

$$a_o' = \frac{m}{\mu Z} a_o = \frac{1}{(207)(82)} (5{,}3 \times 10^{-9} \text{ cm}) = 3{,}1 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

$$\text{radio nuclear} = r = r_o A^{1/3}$$

$$= (1{,}2 \times 10^{-13} \text{ cm})(207)^{1/3} = 7{,}1 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

$$\frac{a_o'}{r} = \frac{3{,}1 \times 10^{-13} \text{ cm}}{7{,}1 \times 10^{-13} \text{ cm}} = 0{,}44$$

Un artículo relacionado con este problema es el de "Mesonic Atoms" por Sergio de Benedetti en *Scientific American,* octubre 1956.

8.16† Las referencias para una prueba detallada se dan en una nota al pie de la página 397. Aquí daremos sólo los pasos principales.

$$\frac{d}{dt} M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \qquad \text{(ver página 345)}$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \qquad \text{(integrando por partes)}$$

$$= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \qquad \text{(integrando por partes)}$$

$$= \frac{1}{m} M(p)$$

$$\frac{d}{dt} M(p) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \right]$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* - V(x)\psi^* \right) \frac{\partial}{\partial x} \psi \right.$$

$$\left. - \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - V(x)\psi \right) \right] \qquad \text{(ver página 345)}$$

Integrando dos veces por partes el tercer término, vemos que se anula el primero. Así pues,

$$\frac{d}{dt} M(p) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^* \left(\frac{d}{dx} V(x) \right) \psi$$

$$= -M \left(\frac{d}{dx} V(x) \right)$$

8.17 (a) Aplicando el teorema de Ehrenfest, en donde $V(x) = Kx^2/2$, se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} M[x(t)] = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} M[p(t)] = -\frac{1}{m} M \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)$$

$$= -\frac{1}{m} M[Kx(t)] = -\frac{K}{m} M[x(t)]$$

(i) $$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{K}{m} \right\} M[x(t)] = 0$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} M[p(t)] = -K \frac{d}{dt} M[x(t)] = -\frac{K}{m} M[p(t)]$$

(ii) $$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{K}{m} \right\} M[p(t)] = 0$$

La solución de la ecuación (i) es

$$M[x(t)] = M[x(0)] \cos \sqrt{K/m}\, t + \frac{1}{\sqrt{mK}} M[p(0)] \operatorname{sen} \sqrt{K/m}\, t$$

La solución de la ecuación (ii) es

$$M[p(t)] = M[p(0)] \cos \sqrt{K/m}\, t - \sqrt{mK}\, M[x(0)] \operatorname{sen} \sqrt{K/m}\, t$$

Las soluciones son exactamente las mismas que en el caso clásico.

(b) Consideremos un estado no estacionario

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_n(x, t) + \psi_{n+1}(x, t)]$$

en donde ψ_n es de la forma $\psi_n(x, t) = \phi_n(x) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_n t \right\}$.

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} |\psi_n(x, t)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_{n+1}(x, t)|^2 + \phi_n(x)\, \phi_{n+1}(x) \cos \frac{t}{\hbar} (E_{n+1} - E_n)$$

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x |\psi(x, t)|^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x |\psi_n(x, t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x |\psi_{n+1}(x, t)|^2$$

$$+ \cos \frac{t}{\hbar} (E_{n+1} - E_n) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, \phi_n(x)\, \phi_{n+1}(x)$$

$$= \cos \frac{t}{\hbar} (E_{n+1} - E_n) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, \phi_n(x)\, \phi_{n+1}(x)$$

De aquí que

$$\frac{d^2}{dt^2} M[x(t)] = -\frac{(E_{n+1} - E_n)^2}{\hbar^2} M[x(t)]$$

Comparando este resultado con el de la parte (a), vemos que

$$E_{n+1} - E_n = \hbar \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \text{para cualquier } n$$

Obsérvese que este resultado se deduce sólo para niveles adyacentes, porque

$$|n - m| > 1 \qquad \text{implica} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, \phi_n(x)\, \phi_m(x) = 0$$

8.18 Según la ecuación (39c)

$$E_j = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2I}$$

$$\omega = \frac{E_j - E_{j-1}}{\hbar} = \frac{\hbar}{2I}[j(j+1) - j(j-1)] = \frac{\hbar j}{I}$$

Para la frecuencia clásica correspondiente se tiene

$$\omega_a = \frac{J}{I}$$

En el caso de valores grandes de j, $\hbar j \to J$; por tanto

$$\omega \to \omega_a$$

Capítulo 9

9.1 (a) La densidad del cadmio es

$$8{,}7\ \text{gm/cm}^3 = 8{,}7\,\frac{6{,}02 \times 10^{23}}{112{,}4}\ \text{átomos/cm}^3 = 4{,}7 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3$$

La densidad superficial de una lámina de 0,1 mm es

$$n = (0{,}01\ \text{cm})\,(4{,}7 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}) = 4{,}7 \times 10^{20}\ \text{cm}^{-2}$$

Según la figura 6A, la sección eficaz del cadmio para neutrones de 0,1 eV es $3{,}4 \times 10^3$ barns. De aquí que

$$n\sigma_T = (4{,}7 \times 10^{20}\ \text{cm}^{-2})\,(3{,}4 \times 10^3\ \text{b})\,(10^{-24}\ \text{cm}^2/\text{b}) = 1{,}60$$

$$T = e^{-n\sigma_T} = e^{-1{,}60} = 0{,}20$$

(b) La densidad superficial en el caso de una lámina gruesa de 1 cm es

$$n = (1\ \text{cm})\,(4{,}7 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-3}) = 4{,}7 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-2}$$

La sección eficaz para neutrones de 1 eV es 21 barns.

$$n\sigma_T = (4{,}7 \times 10^{22}\ \text{cm}^{-2})\,(21 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2) = 0{,}99$$

$$T = e^{-n\sigma T} = e^{-0{,}99} = 0{,}37$$

9.2 El número medio de interacciones por centímetro para un mesón K^+ con energía cinética de 400 MeV en hidrógeno líquido es

$$N = n\sigma_T = (1{,}0\ \text{cm})\,(0{,}071\ \text{gm/cm}^3)\,(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/gm})\,(15\ \text{mb}) = 6{,}4 \times 10^{-4}$$

9.3 En el caso de producción de pares en la placa de plomo, se tiene

$$n\sigma_T = (0{,}25\ \text{cm})\,(11{,}3\ \text{gm/cm}^3)\,(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/207 gm})\,(14\ \text{b}) = 0{,}115$$

La probabilidad de que se produzca un par es

$$P = 1 - T = 1 - e^{-0{,}115} = 0{,}109$$

9.4 Calculemos primeramente x, desplazamiento máximo del electrón. La fuerza que actúa sobre él es

$$F = eE = eA \operatorname{sen} \omega t$$

Si llamamos y al desplazamiento instantáneo del electrón, tendremos

$$F = eA \operatorname{sen} \omega t = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

o bien

$$y = -\frac{eA}{m\omega^2} \operatorname{sen} \omega t$$

De aquí que

$$x = \frac{eA}{m\omega^2}$$

Según la ecuación (48b) de la página 130, la potencia radiada es

$$W = \frac{\omega^4 (ex)^2}{3c^3} = \frac{e^4 A^2}{3c^3 m^2}$$

El flujo de potencia incidente medio es

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle E^2(t) \rangle_M = \frac{cA^2}{4\pi} \langle \operatorname{sen}^2 \omega t \rangle_M = \frac{c}{8\pi} A^2$$

La sección eficaz es

$$\sigma = \frac{W}{I} = \frac{8}{3} \pi r_o^2 = 0{,}67 \text{ b} \qquad \text{siendo } r_o = \frac{e^2}{mc^2}$$

9.5 (a) En el caso del pión

$$E = KE + m_\pi c^2$$

$$pc = \sqrt{E^2 - m_\pi^2 c^4} = \sqrt{KE(KE + 2m_\pi c^2)} =$$

$$= \sqrt{195 \text{ MeV} (195 \text{ MeV} + 2 \times 139{,}6 \text{ MeV})} = 304 \text{ MeV}$$

$$(\sigma_e)_{\max} = 4\pi \left(\frac{\hbar}{p} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{hc}{pc} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{hc}{304 \text{ MeV}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1{,}24 \times 10^{-4} \text{ cm}}{304 \times 10^6} \right)^2 = 5{,}30 \times 10^{-26} \text{ cm}^2 = 53{,}0 \text{ mb}$$

Según el gráfico de la figura 24B, $\sigma_{\max} \simeq 190$ mb.

Puede mejorarse el resultado teórico incluyendo el factor que se obtiene al tener en cuenta el impulso angular y el "spín" y dejando de admitir que el protón es infinitamente pesado. Dicho factor es $(2J + 1)/2$, siendo J el impulso angular total de la resonancia (Blatt y Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, página 439). En este caso $J = 3/2$, de modo que el factor es 2. Para tener en cuenta la masa real del protón, utilizaremos el impulso referido al centro de masas en la expresión de $(\sigma_e)_{max}$. Despejando se tiene

$$p_\pi = p_p \equiv p$$

$$E_\pi + E_p = 1238 \text{ meV}$$

o bien

$$\sqrt{p^2c^2 + (140 \text{ meV})^2} + \sqrt{p^2c^2 + (938 \text{ meV})^2} = 1238 \text{ meV}$$

que da

$$pc = 233 \text{ meV}$$

Esto introduce un factor

$$\left(\frac{304}{233}\right)^2 = 1{,}7$$

El nuevo resultado es

$$(\sigma_e)_{max} = (1{,}7)\,(2)\,(53{,}0 \text{ mb}) = 180 \text{ mb}$$

(b) La anchura de la resonancia en la curva π^+p de la figura 24B es de 120 meV aproximadamente.

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{1}{2\pi(120 \times 10^6)} \frac{h}{1 \text{ eV}} = \frac{1{,}33 \times 10^{-9}}{2{,}42 \times 10^{14}} \text{ seg} = 5{,}5 \times 10^{-24} \text{ seg}$$

La resonancia $N^*_{3/2}$ se estudia en *Núcleos y partículas* de E. Segrè (EDITORIAL REVERTÉ, S. A.).

9.6 Para fotones de 14,4 keV

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1}{14{,}4 \times 10^3} \frac{hc}{1 \text{ eV}} = \frac{1{,}24 \times 10^{-4}}{14{,}4 \times 10^3} \text{ cm} = 8{,}61 \times 10^{-9} \text{ cm}$$

$$(\sigma_e)_{max} = 4\pi \left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}$$

$$= \frac{(8{,}61 \times 10^{-9} \text{ cm})^2}{3{,}14} = 2{,}36 \times 10^{-17} \text{ cm}^2 = 2{,}36 \times 10^7 \text{ b}$$

El volumen molar del hierro es de 7,09 cm^3 *(Handbook of Chemistry and Physics).* La densidad es

$$\frac{6{,}02 \times 10^{23}}{7{,}09} \text{ átomos/cm}^3 = 8{,}5 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3$$

La lámina utilizada en el experimento de la figura 16A del capítulo 4 era acero inoxidable tipo 321, con 74 % de hierro. En el hierro el Fe^{57} se presenta con una abundancia del 2,2 % *(Handbook of Chemisty and Physics).* De aquí que la densidad de los núcleos de Fe^{57} en la lámina sea aproximadamente

$$(0{,}74)\,(0{,}022)\,(8{,}5 \times 10^{22}) \text{ núcleos/cm}^3 = 1{,}4 \times 10^{21} \text{ núcleos/cm}^3$$

En el caso de una lámina de espesor 1 milésima de pulgada = 0,00254 cm, tendremos

$$n\sigma = (0{,}00254 \text{ cm})\,(1{,}4 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3})\,(2{,}36 \times 10^{-17} \text{ cm}^2) = 84$$

Esto da

$$T = e^{-n\sigma} = e^{-84} = 3 \times 10^{-37}$$

El número encontrado es excesivamente pequeño a la vista de las curvas de la figura 16A del capítulo 4, en donde

$$T \approx 75 \%$$

Para obtener un resultado numéricamente correcto se debería haber tomado un valor de la sección eficaz de absorción que tuviese en cuenta factores adicionales. Los principales son:

I Ensanchamiento de las líneas debido a procesos de desintegración semejantes

II Influencia del spín nuclear y fotónico

III Probabilidad finita de absorción con pérdida de energía (factor Lamb-Mössbauer)

Estos efectos se estudian en *The Mössbauer Effect* de Frauenfelder.

9.7 (a) La sección eficaz de resonancia es

$$\sigma_{max} = 4\pi\left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{\pi} = \frac{(5896 \text{ Å})^2}{3{,}14} = 1{,}11 \times 10^{-9} \text{ cm}^2 = 1{,}11 \times 10^{15} \text{ b}$$

(b) Para estimar la sección eficaz efectiva con las hipótesis señaladas en el problema, debemos tener en cuenta el hecho de que la sección eficaz de absorción se verá reducida por el desplazamiento doppler, debido al movimiento de los átomos que absorben. Sólo una pequeña fracción de los átomos que absorben ten-

drán una velocidad longitudinal (próxima a cero) tal que absorban la luz incidente.

Sea ω_o la frecuencia central de la raya amarilla. Consideremos un átomo de sodio en el recipiente blanco que tenga una velocidad tal que su frecuencia de absorción desplazada por doppler sea ω_o'. Debido a la anchura natural de la raya de la luz incidente y de la raya de absorción, la sección eficaz de absorción será aproximadamente el valor de resonancia máxima dentro del intervalo

$$\omega_o - \frac{1}{2}\Delta\omega_N < \omega_o' < \omega_o + \frac{1}{2}\Delta\omega_N$$

siendo $\Delta\omega_N$ la anchura natural. La fracción de átomos en el recipiente cuya frecuencia desplazada por doppler caiga dentro de este intervalo es aproximadamente

$$\frac{\Delta\omega_N}{\Delta\omega_D}$$

siendo $\Delta\omega_D$ la anchura del ensanchamiento Doppler. De aquí que

$$\sigma_{eff} \simeq \frac{\Delta\omega_N}{\Delta\omega_D}\sigma_{max}$$

Según la solución al problema 3.3

$$\frac{\Delta\omega_N}{\Delta\omega_D} = \frac{0{,}00053}{0{,}024} = 0{,}022$$

Así pues,

$$\sigma_{eff} \simeq (0{,}022)\,(1{,}11 \times 10^{-9}\ \text{cm}^2) = 2{,}4 \times 10^{-11}\ \text{cm}^2$$

(c)

$$T = e^{-n\sigma} = \frac{1}{2}$$

$$n\sigma = \ln 2 = 0{,}693$$

$$\text{densidad} = \rho = \frac{n}{1\ \text{cm}} = \frac{0{,}693}{(1\ \text{cm})\sigma} =$$

$$= \frac{0{,}693}{(1\ \text{cm})\,(2{,}4 \times 10^{-11}\ \text{cm}^2)} = 2{,}9 \times 10^{10}\ \text{átomos/cm}^3$$

9.8 Consideremos primeramente las posibilidades de los productos de desintegración si uno de los bariones sufre una fuerte desintegración. La conservación del número de barión exige que por lo menos uno de los productos sea un barión.

Pueden producirse otros pares barión-antibarión sin violarse la conservación de bariones, pero los más ligeros posibles (p o n) son demasiado pesados para ser producidos a partir de la energía disponible. Por lo tanto, existirá sólo un barión entre los productos.

Obsérvese que la conservación de la carga impide desintegraciones del tipo $\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0$ a no ser que exista una partícula cargada en el estado final, pero la partícula más ligera fuertemente interactiva (π) es demasiado pesada para ser producida a partir de la energía disponible.

A partir de las masas de los bariones, podemos ver que entre los productos de la desintegración, la única partícula fuertemente interactiva, además del barión necesario, es un mesón π. Este mesón tiene hipercarga 0, así que cualquier desintegración producirá un barión con la misma hipercarga que el barión que sufre la desintegración. Este hecho, combinado con la conservación de energía, elimina las posibilidades restantes.

Si están permitidas las interacciones electromagnéticas, podemos tener en el estado final fotones o pares como $e^+ - e^-$. Como deben conservarse la carga y la hipercarga, sólo pueden estar conectados mediante una interacción electromagnética los Σ^0 y Λ. Esto hace que sea permitido una desintegración del tipo $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$.

9.9 A partir de los diagramas de las figuras 29A-D vemos que si uno cualquiera de los ejes coordenados tiene un valor fijo, los otros dos dependen linealmente entre sí. Por tanto, los tres dependerán linealmente.

$$aQ + bY + cI_3 + d = 0$$

Calculando la ecuación en 3 puntos pueden determinarse tres de los constantes a, b, c y d.

(Q, Y, I_3)		
(0, 0, 0)	da	$d = 0$
(1/2, 1, 0)	da	$a = -2b$
(0, 2, — 1)	da	$c = 2b$

Poniendo $b = 1/2$, se tiene

$$I_3 = Q - \frac{Y}{2}$$

Por consiguiente, la conservación de la carga e hipercarga implica la conservación de la tercera componente del spín isotópico.

9.10 (a) Se conserva la extrañeza siempre que se conserve la hipercarga y el número de barión, es decir, en procesos electromagnéticos y fuertes.

(b) De la solución al problema 9.9, se tiene

$$Y = 2Q - 2I_3$$

De aquí que

$$S = Y - B = 2Q - 2I_3 - B$$

o sea

$$S + B + 2I_3 - 2Q = 0$$

9.11 Deseamos hallar la energía mínima necesaria para la reacción

$$p + p \rightarrow \Lambda + X$$

X debe tener un número de barión + 1, carga + 2 e hipercarga + 2. La combinación de partículas con estos números cuánticos y con la energía mínima viene dada por

$$X = p + K^+$$

En el sistema centro de masas, la energía total mínima necesaria para la reacción es

$$E_{CM} = (1115{,}58 + 938{,}256 + 493{,}8)\ \text{MeV} = 2547{,}6\ \text{MeV}$$

Utilizamos unidades en las que $c = 1$. Utilizando el hecho de que en las transformaciones de Lorentz se conserva

$$(E_{\text{total}})^2 - (\vec{p}_{\text{total}})^2$$

tenemos que

$$E_L^2 - P_L^2 = (E_{CM})^2$$

en donde L se refiere al sistema del laboratorio y CM al del centro de masas. Como

$$E_L = \sqrt{m^2 + p_L^2} + m$$

en donde m es la masa del protón, la energía cinética del protón incidente es

$$K = \sqrt{m^2 + p_L^2} - m = \frac{(E_{CM})^2}{2m} - 2m =$$

$$= \frac{(2548\ \text{MeV})^2}{2 \times 938\ \text{MeV}} - 2 \times 938\ \text{MeV} = 1585\ \text{MeV}$$

9.12 Obsérvese que en este problema $\hbar = c = 1$.

(a)

$$\psi_s(\vec{x}, t) = Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp - i\omega t)$$

La ecuación de Klein-Gordon es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{x}, t) - \nabla^2\psi(\vec{x}, t) = -m^2\psi(\vec{x}, t)$$

Sabemos que ψ_s satisface esta ecuación calculando las derivadas

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_s(\vec{x}, t) = -\omega^2\psi_s(\vec{x}, t)$$

Como $\psi(\vec{x}, t)$ es una función de $x = |\vec{x}|$ solamente, se tiene

$$\nabla^2\psi_s(\vec{x}, t) = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\psi_s(\vec{x}, t)\right) = -p^2\psi_s(\vec{x}, t) \qquad x \neq 0$$

De aquí que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_s(\vec{x}, t) - \nabla^2\psi_s(\vec{x}, t) = (-\omega^2 + p^2)\psi_s(\vec{x}, t) = -m^2\psi_s(\vec{x}, t)$$

puesto que $\omega^2 = p^2 + m^2$

(b) En coordenadas esféricas

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{x^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

Cuando la laplaciana actúa sobre la función de onda dada en el problema, el primer término indicado anteriormente da el mismo resultado que en la parte (a), anulando los términos restantes de la ecuación Klein-Gordon. El segundo término es igual a cero porque ψ_s no depende de ϕ. El tercer término es el término de error y da

$$\frac{1}{x^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi_s}{\partial\theta}\right) = \frac{C}{x^3}\exp(ixp - i\omega t)\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\right)$$

Así pues, el error relativo a ψ_s es $\sim x^{-2}$, cuando $x \to \infty$.

Referencias

R. H. BAKER, *Astronomy,* 7th ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1959.

J. M. BLATT and V. F. WEISSKOPF, *Theoretical Nuclear Physics,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.

H. A. BOORSE and L. MOTZ (editores), *The World of the Atom,* Vols. I y II, Basic Books, Inc., New York, 1966.

M. BORN, *Atomic Physics,* 8.ª ed., Hafner Publishing Company, Inc., Darien, Conn., 1970.

R. M. EISBERG, *Fundamentals of Modern Physics,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.

R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, and M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics,* Vols. I, II y III, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

H. FRAUENFELDER, *The Mössbauer Effect,* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1962.

C. KITTEL, *Introducción a la física del estado sólido,* Editorial Reverté, S. A.

E. MERZBACHER, *Quantum Mechanics,* John Wiley & Sons, Incs., New York, 1961.

A. C. G. MITCHELL and M. W. ZEMANSKY, *Resonance Radiation and Excited Atoms,* The Syndics of the Cambridge University Press, London, 1961.

F. REIF, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

L. I. SCHIFF, *Quantum Mechanics,* 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

E. SEGRÈ, *Núcleos y partículas,* Editorial Reverté, S. A.

J. M. STONE, *Radiation and Optics,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

R. C. WEAST (editor), *Handbook of Chemistry and Physics,* 50.ª ed., The Chemical Rubber Company. Cleveland, Ohio, 1969-1970.